Сборник задач

Теория вероятностей

Породников В.Д.
Румянцев Н.В.

ДонГУ- 2000

АННОТАЦИЯ

«Сборник задач по теории вероятностей» охватывает все основные разделы теории вероятностей, встречающиеся при решении практических вопросов, связанных с обработкой опытных данных, установлением их точности и т. д.

В каждом параграфе дана краткая сводка рабочих формул и схем, применение которых иллюстрируется решением примеров. Задачи снабжены в отдельных случаях и краткими указаниями, позволяющими читателю самостоятельно найти путь к их решению.

«Сборник задач» рассчитан на учащихся высших учебных заведений и может быть использован как в процессе первоначального изучения теории вероятностей, так и для выработки практический навыков применения вероятностных методов исследования.

Предисловие

Математическая теория становится более понятной и доступной, если ее удается использовать при решении практических задач. Одна из общих тенденций современной математики состоит в резком повышении роли тех разделов науки, которые анализируют явления имеющие «случайны» характер, и основываются на теории вероятностей, которая стала, чуть ли не самой первой по прикладному значению из всех математических дисциплин.

Предлагаемый сборник задач был задуман как учебное пособие, приспособленное к университетскому курсу по теории вероятностей и математической статистике для студентов экономических специальностей и учебнику « Теория вероятностей и математическая статистика» В.Н. Бандуры, В.Д. Породникова. В книге отражен опыт работы авторов, работающих на математическом и экономическом факультетах Донецкого государственного университета.

Подходящим образом, отбирая задачи из книги, преподаватель может использовать ее как основу для проработки различных теоретических курсов по теории вероятностей и математической статистике. Лучшими помощниками здесь будут Ваш опыт и вкус.

При написании сборника автор пользовался помощью и критикой, а также поддержкой тт. Бандуры В.Н., Шкварченко Т.В., которые любезно предоставили свои задачи и разработки, мы выражаем свою признательность и благодарность.

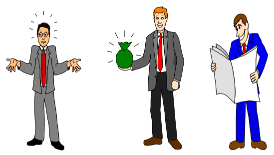
Тема1. Комбинаторика

Основной принцип комбинаторики (правило умножения)

Комбинаторика - один из разделов дискретной математики, который приобрел важное значение в связи с использованием его представителями многих специальностей. Из поколения в поколение людей интересовали задачи, в которых требовалось найти количество способов выбора или расположения элементов некоторого множества объектов в соответствии с заданными правилами. В теории вероятностей потребуются ответы на аналогичные вопросы.

Пусть необходимо последовательно выполнить **k** действий над объектами, природа которых нас не будет интересовать.

Пример 1.1. Сколькими способами можно расположить в очереди трех человек?



Чтобы решить эту задачу выпишем все возможные размещения и посчитаем их. Чтобы ни одно из размещений не было пропущено, перечисление всех вариантов удобно связать с построением специального графа, который называется *деревом* (рис. 1.1).

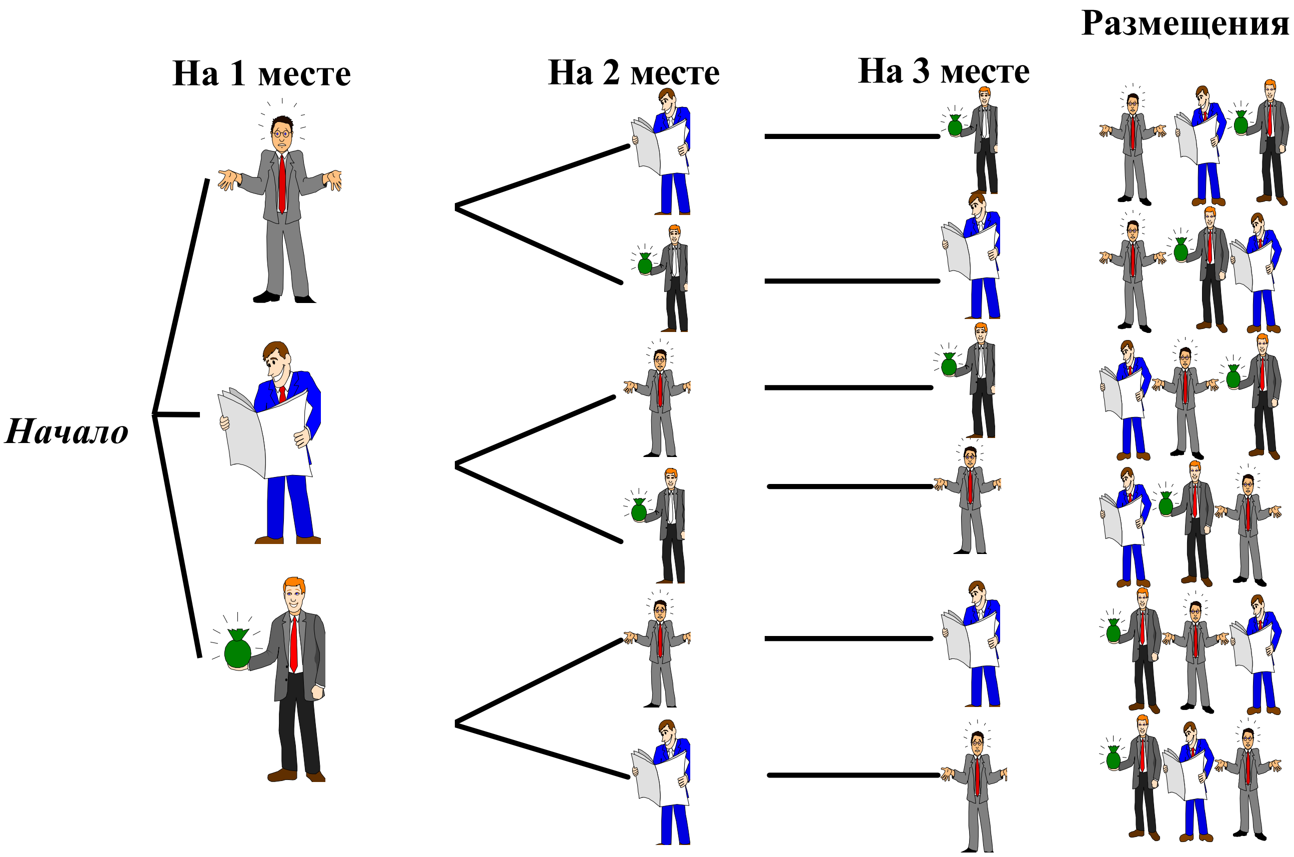


Рис. 1.1.

Изучение дерева наводит на более удачное решение этой задачи.

Будем рассуждать следующим образом: имеется три места.

I	II	III

На первое место мы можем поместить любого из 3 человек. Поэтому первое место можно заполнить тремя способами, тогда на втором месте расположим любого из 2 оставшихся - два способа и последнее место займет оставшийся.

3	2	1

Тогда общее число размещений находится умножением 3x2x1 = 6.

Обобщение этой задачи выглядит следующим образом. Пусть есть k множеств:

$N_1 \quad N_2 \quad \ldots \quad N_k$

каждое состоит из $n_1 \quad n_2 \quad \ldots \quad n_k$ элементов. Образование множеств по какому либо правилу или признаку называется *комбинаторным соединением*. Например, из каждого множества N_i ($i = 1,\ldots,k$), будем брать по одному элементу (представителю), получим некоторые комбинаторные соединения: $(n_1^1, n_2^1, \ldots, n_k^1), \ldots, (n_1^{n_1}, n_2^{n_2}, \ldots, n_k^{n_k})$. Используя рассуждения приведенного выше примера можно вычислить число комбинаторных соединений как произведение $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$. В этом состоит основной принцип комбинаторики.

Правило умножения. *Пусть необходимо выполнить k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, после чего второе - n_2 способами и так далее до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий можно выполнить способами.*

$$\mathbf{N = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k}$$

Комбинации (сочетания) из *n* элементов по *k*

Пусть некоторое множество A состоит из n элементов (n = 4). Тогда сколько способов выбрать из него k элементов?

Пример 1.2. Пусть $A = \{$♣ ♦ ♥ ♠$\}$ состоит из четырех элементов и нужно отобрать (k = 2) два элемента. Сколько комбинаторных соединений мы получим?

Чтобы решить эту задачу перечислим все варианты:

{♣ ♦}, {♣ ♥}, {♣ ♠}, {♦ ♥}, {♦ ♠}, {♥ ♠}.

Сочетания. *Сочетания есть такие комбинаторные соединения (набор объектов), которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом (без учета их порядка). Сочетанием из n элементов по k называется произвольное неупорядоченное k -элементное подмножество множества, содержащего n различных объектов. Общее число таких сочетаний обозначается* C_n^k *или* $\binom{n}{k}$*; здесь* $k \le n$ *и вычисляется:*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$, (читается «n факториал» и $0! \equiv 1$).

Упорядоченные множества

Множество из ***n*** элементов называется *упорядоченным*, если каждому элементу этого множества сопоставлено некоторое число (номер элемента) от 1 до n так, что разным элементам соответствуют разные числа. Множества считаются *различными* , если они отличаются либо своими элементами, либо их порядком.

Перестановки элементов данного множества

Рассмотрим теперь некоторый специальный тип размещений, т.е. такие комбинаторные соединения элементов, которые отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Перестановка. *Перестановкой некоторого количества объектов называют любое соединение этих элементов, которые отличаются, друг от друга только порядком этих элементов (комбинаторные соединения могут быть образованы из одного и того же множества).*

Число перестановок множества из n элементов равно

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Размещения из *n* элементов по *k*.

Размещения. *Размещениями называются упорядоченные k-элементные подмножества множества, содержащего n элементов (комбинаторные соединения отличаются друг от друга либо порядком, либо составом элементов). Общее число таких размещений обозначается* A_n^k *(* $k \le n$*).*

Число размещений множества из n элементов по k равно

$$A_n^k = P_k \cdot C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

Задачи для самостоятельного решения

1.3. Из г. Макеевки в г. Донецк можно добраться автобусом, троллейбусом, такси, поездом из г. Донецка до г. Киева - самолетом, поездом. Сколькими способами можно осуществить путешествие по маршруту Макеевка - Донец - Киев?

1.4. В классе изучают 10 предметов. В понедельник 6 уроков, причем все уроки разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

1.5. Сколько есть двузначных чисел, у которых обе цифры четные, но различные?

1.6. Сколькими способами 7 человек могут расположиться в очереди к кассе?

1.7. Сколькими способами можно составить четырехцветный флаг из горизонтальных полос одинаковых размеров, имея четыре различных цвета?

1.8. В турнире принимали участие 12 шахматистов и каждые 2 шахматиста встречались один раз. Сколько партий было сыграно в турнире ?

1.9. Сколькими способами из 9 человек можно выбрать комиссию, состоящую из 5 человек?

1.10. На собрании присутствует 15 человек, из них 9 женщин. в состав делегации из 7 человек входят 4 мужчины. Сколько способов составить такую делегацию?

1.11. Студенту нужно в течение 8 дней сдать 4 экзамена. Сколькими способами это можно сделать? Определить количество способов, если известно, что последний экзамен будет сдан в последний день.

1.12. Сколько есть перестановок из n элементов, в которых данные 2 элемента не стоят радом?

1.13. Сколькими способами можно составить набор из 8 пирожных, если имеется 4 сорта?

1.14. Имеется 6 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на правую руку и одну перчатку на левую руку так, чтобы эти перчатки были различных размеров?

Случайные события

Тема 2. Операции над событиями и их соотношения

Теория вероятностей изучает модели экспериментов со случайными исходами (стохастический эксперимент). Э*лементарным событием (исходом)* будем называть такой результат случайного эксперимента (опыта), который несет в себе полную информацию о его последствиях, является *неразложимым*. Каждый неразложимый исход представляется одним и только одним элементарным событием. Элементарные события будем обозначать греческими литерами ω, или $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$. Множество (пространство) всех элементарных событий связанных с данным экспериментом будем обозначать $\boldsymbol{\Omega} = \{\omega_i\}_{i=1}^n$. Под этим понимается множество взаимоисключающих исходов т.е. результатом эксперимента всегда является один и только один исход.

Все события, связанные с данным случайным экспериментом, могут быть описаны как совокупности элементарных событий их называют *(случайными) событиями*. События обозначают заглавными литерами латинского алфавита $A, B, C, D, A_1, B_2, \ldots$. Каждому событию соответствует некоторое подмножество множества элементарных исходов Ω. Но тогда Ω - событие, которое всегда имеет место в рассматриваемом эксперименте и его логично назвать *достоверным* событием. *Невозможным* событием называют событие ($\varnothing$), которое в условиях эксперимента не происходит никогда. Равенство $A = B$ означает, что появление одного из этих событий влечет за собой появление другого события

$$(A \subset B \text{ и } B \subset A).$$

Пусть имеем события A и B.

Их с*уммой* (объединением) называют событие C , происходящее тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из данных событий, при этом пишут $C = A \cup B$.

Их *произведением* (пересечением) называют событие C , происходящее тогда и только тогда, когда происходят одновременно оба данных события, при этом пишут $C = A \cap B$.

Событие $\overline{A}$ называются *противоположным* событию A, если оно происходит тогда и только тогда, когда A не происходит.

Разностью событий A и B (в указанном порядке) называют событие C, происходящее тогда и только тогда, когда происходит событие A и $\overline{B}$, при этом пишут $C = A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

События A и B называются *несовместными*, если $A \cap B = \varnothing$ (одновременное их осуществление невозможно).

Последовательность событий $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ образует *полную группу,* если $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$ и *полную группу попарно несовместных событий,* если

$H_i \cap H_j = \varnothing$, при $i \neq j$, ($i,j = 1,2,3, ..., n.$).

Приведем таблицу, показывающую, как некоторые понятия теории множеств интерпретируются в теории вероятностей:

Обозначения	Язык теории множеств	Язык теории вероятностей
Ω	Универсальное множество, множество всех	Пространство элементарных событий (элементарных исходов эксперимента). Достоверное событие
ω	Элемент Ω	Элементарное событие
$\mathcal{A}$	Некоторое множество элементов	Событие А (если $\omega \in \mathcal{A}$, то говорят, что наступило событие А)
$\varnothing$	Пустое множество	Невозможное событие
$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$	А - подмножество В	Из наступления события А необходимо следует наступление события В
$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$	Объединение множеств А и В; множество элементов, входящих или в А, или в В	Событие, состоящее в том, что произошло А или В (сумма событий)
$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$	Пересечение множеств А и В; множество элементов, входящих и в А, и в В	Событие, состоящее в том, что произойдет и А, и В (произведение событий)
$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$	А и В - непересекающиеся множества	А и В - несовместные события
$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$	Разность множеств А и В	Событие, состоящее в том, что произойдет А, но не произойдет В
$\bar{\mathcal{A}}$	Дополнение множества $\bar{\mathcal{A}} = \Omega \setminus \mathcal{A}$	$\bar{A}$ противоположное событию $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \cap \bar{\mathcal{A}} = \varnothing$, $\mathcal{A} \cup \bar{\mathcal{A}} = \Omega$.

П р и м е р 2.1. Эксперимент: бросают игральную кость и наблюдают полученный результат. Множество элементарных исходов в данном случае $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, где $\omega_1 = 1, \ \dots \ , \omega_6 = 6$. Пусть событие $\mathcal{A}$ состоит в появлении четного числа; $\mathcal{B}$ - в появлении нечетного числа; $\mathcal{D}$ - в появлении простого числа. Очевидно, что

$$\mathcal{A} = \{2,4,6\}, \ \mathcal{B} = \{1,3,5\}, \ \mathcal{D} = \{2,3,5\}.$$

Тогда:

$\mathcal{A} \cup \mathcal{D} = \{2,3,4,5,6\}$ – событие, соответствующее появлению четного числа или простого;

$\mathcal{B} \cap \mathcal{D} = \{3, 5\}$ – событие, соответствующее появлению простого нечетного числа;

$\overline{\mathcal{D}} = \{1,4,6\}$ – событие, соответствующее появлению числа, которое не является простым.

Заметим, что события A и B являются несовместными, если $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$. Другими словами, осуществление события A и B одновременно невозможно, т.е. невозможно, чтобы четное и нечетное числа появились одновременно в условиях нашего эксперимента.

Пример 2.2. Эксперимент: бросают монету (правильную) три раза и наблюдают последовательность появившихся гербов (Г) и решек (Р). В данном случае множество элементарных исходов

$$\Omega = \{ГГГ,\ ГГР,\ ГРГ,\ РГГ,\ ГРР,\ РГР,\ ГРР,\ РРР\},$$

где ω_1 = (ГГГ), ω_2 = (ГГР), ... , ω_8 = (РРР).

Пусть A – событие, соответствующее последовательному появлению двух и более гербов, а событие B = {последовательное появление трех гербов или решек}. Тогда

$$A = \{ГГР,\ РГГ,\ ГГГ\},\quad B = \{ГГГ,\ РРР\},\ \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{ГГГ\}.$$

Событие, которому соответствовало бы в условиях нашего эксперимента появление, например, пяти гербов, является невозможным событием – $\varnothing$.

Пример 2.3. Эксперимент: бросают монету до тех пор, пока не появится герб и подсчитывают число бросаний монеты. В данном эксперименте пространство элементарных исходов $\Omega = \{1,2,3,4,\ \ldots\}$.

Пример 2.4. Эксперимент: двое договорились встретиться в интервале времени $[T, T+t]$, причем любой из пришедших ожидает второго в течение времени $\tau < t$. В данном случае пространство элементарных исходов $\Omega = \{(x,y) : x \in [T, T+t],\ y \in [T, T+t]\}$, где x и y – моменты прихода, соответственно первого и второго из договаривающихся.

Задачи для самостоятельного решения

2.5. Доказать, что операции сложения и умножения событий обладают следующими свойствами:

- $(A \cup B) = (B \cup A)$, $(B \cap A) = (A \cap B)$ (*коммутативность*);
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (*ассоциативность*);
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (*дистрибутивность умножения относительно сложения*).

2.6. Проверить верны ли следующие равенства:

- $(A \cup B) \cap A = A$;
- $(B \cap A) \cup A = A$ - (формулы поглощения);
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (формулы двойственности).

2.7. Что означают события $A \cup A$ и $A \cap A$?

2.8. Когда возможно равенство $B \cap A = A$?

2.9. Игральная кость подбрасывается один раз. Пусть ω_i элементарный исход, означающий появление грани, на которой i - очков (i = 1,2,3,4,5,6). Обозначим событие A - «на верхней грани четное число очков» ($A = \{ \omega_2, \omega_4, \omega_6 \}$), а событие B - « на верхней грани число очков, кратное трем» ($B = \{ \omega_3, \omega_6 \}$). Опишите следующие события:

а) $C = A \cup B$;
б) $D = A \cap B$;
в) $E = A \setminus B$;
г) $H = B \setminus A$;
д) $F = \overline{A}$;
е) $G = \overline{B}$;
ж) $\overline{C} = \overline{A \cup b} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Тема 3. Определение вероятности события

Событием (или «случайным событием») называется всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Вероятностью события называется численная мера степени объективной возможности этого события. Вероятность события **А** обозначается **Р (А).**

Достоверным называется событие, Ω, которое в результате опыта непременно должно произойти. $\mathbf{P(\Omega) = 1}$.

Невозможным называется событие, $\varnothing$, которое в результате опыта не может произойти. $\mathbf{P(\varnothing) = 0}$.

Вероятность любого события А заключена между нулем и единицей:

$$\mathbf{0 < P(A) < 1.}$$

Полной группой событий называется несколько событий таких, что в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них.

Несколько событий в данном опыте называются *несовместными*, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Несколько событий в данном опыте называются *равновозможными*, если по условиям симметрии опыта нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое,

Если несколько событий: 1) образуют полную группу; 2) несовместны; 3) равновозможные, то они называются случаями («шансами»).

Случай называется *благоприятным* событию, если появление этого случая влечет за собой появление события.

Если результаты опыта сводятся, к схеме случаев, то вероятность события А вычисляется по формуле

$$\mathbf{P(A) = \frac{m}{n},}$$

n - общее число случаев, m - число случаев, благоприятных событию А.

Пусть пространство элементарных исходов Ω конечно, т.е. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Если каждому исходу $\omega_i \in \Omega$ поставим в соответствие действительное число $p_i = P\{\omega_i\}$, называемое вероятностью или весом исхода ω_i, удовлетворяющее следующим свойствам:

$$p_i = P\{\omega_i\} \geq 0 \;, (i=\overline{1,n}) \;; \; \sum_i p_i = 1 \,,$$

тогда пара (Ω, P) называется вероятностным пространством, которое в данном случае называется конечным вероятностным пространством. Вероятность P(A) некоторого события A определится как сумма вероятностей элементарных исходов, благоприятствующих событию A, т.е.

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) = \sum_{\omega_i \in A} p_i \,.$$

П р и м е р 3.1. Бросают три раза монету и наблюдают число появившихся гербов. В данном случае $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$. Приписывая элементарным исходам веса $P(0) = 1/8$, $P(1) = 3/8$, $P(2) = 3/8$, $P(3) = 1/8$, получим конечное вероятностное пространство (или вероятностную модель эксперимента с конечным числом исходов), так как все веса неотрицательны и сумма их $P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 1$.

Рассмотрим событие $A = \{$появилось 3 решки или 3 герба$\}$. Тогда $A = \{0, 3\}$ и по определению $P(A) = P(0) + P(3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$.

П р и м е р 3.2. Три лошади (A, B и C) участвуют в бегах. Лошадь A имеет в 2 раза больше шансов выиграть, чем B, а B, в свою очередь, имеет в 2 раза больше шансов выиграть, чем C. Каковы вероятности выигрыша для каждой из трех лошадей?

Пусть $P(C) = p$. Тогда $P(B) = 2p$ и очевидно, что $P(A) = 2P(B) = 4p$.

Так как сумма всех вероятностей равна I, имеем

$$p + 2p + 4p = 1 \text{ или } p = \frac{1}{7}.$$

Следовательно, $P(A) = \frac{4}{7}$; $P(B) = \frac{2}{7}$; $P(C) = \frac{1}{7}$.

Примеры для решения

П р и м е р 3.3. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ и пусть $P(\omega_i)$, $i=\overline{1,4}$ вероятность на Ω:

I. Вычислить $P(\omega_1)$, предполагая, что $P(\omega_2) = \frac{1}{3}$, $P(\omega_3) = \frac{1}{6}$, $P(\omega_4) = 1/9$.

2. Вычислить $P(\omega_1)$, предполагая, что $P(\omega_1) = \frac{1}{3}$, $P\{\{\omega_2\} + \{\omega_3\}\} = 2/3$, $P\{\{\omega_2\} + \{\omega_4\}\} = \frac{1}{3}$.

3. Вычислить $P(\omega_1)$ и $P(\omega_2)$, предполагая, что $P(\omega_3) = P(\omega_4) = \frac{1}{4}$ и $P(\omega_1) = 2\,P(\omega_2)$.

П р и м е р 3.4. Некто подделал монету таким образом, что решка появляется с вероятностью в два раза большей, чем герб. Вычислить $P(\omega_1)$, $P(\omega_2)$, $\omega_1 = (\Gamma)$, $\omega_2 = (P)$.

П р и м е р 3.5. Некто подделал игральную кость таким образом, что вероятность выпадения для каждой грани пропорциональна числу очков, нанесенных на ней. (Например, цифра 6 имеет вероятность в два раза большую, чем 3).

Пусть $A = \{$четное число$\}$, $B = \{$простое число$\}$ и $C = \{$нечетное число$\}$.

I. Вычислить вероятности возможных результатов этого эксперимента.

2. Вычислить P(A), P(B), P(C).

3. Вычислить вероятность того, что в результате эксперимента получим:

а) числа четное или простое; б) нечетное простое число; произойдет событие A, а не B.

П р и м е р 3.6. Среди следующих примеров укажите те, которые определяют вероятности на пространстве элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

а) $P(\omega_1)=\frac{1}{4}$, $P(\omega_2)=\frac{1}{3}$, $P(\omega_3)=\frac{1}{2}$;

б) $P(\omega_1)=\frac{2}{3}$, $P(\omega_2)=-\frac{1}{3}$, $P(\omega_3)=\frac{2}{3}$;

в) $P(\omega_1)=\frac{1}{6}$, $P(\omega_2)=\frac{1}{3}$, $P(\omega_3)=\frac{1}{2}$;

г) $P(\omega_1)=0$, $P(\omega_2)=\frac{1}{3}$, $P(\omega_3)=\frac{2}{3}$.

Классическое определение вероятности

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, P), где множество элементарных исходов конечно: $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n\}$. Если из условий эксперимента видно, что все исходы его равновозможны, то в этом случае очевидно $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\dots P(\omega_n)=\frac{1}{n}$. Тогда, если $P(A)=\sum_{\omega_{i_k}\in A} P(\omega_{i_k})$, вероятность $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\dots,\omega_{i_k}\}$, и можно определить вероятность P(A)

$$P(A)=\frac{\text{число исходов благоприятных событию } A}{\text{общее число исходов}}=\frac{m}{n},$$

т.е. имеет место

Определение. Если элементарные исходы эксперимента равновозможны, то вероятность события A определяется как отношение числа m исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу n возможных исходов эксперимента, т.е. $P(A)=\frac{m}{n}$.

Пример 3.7. Вытащим наудачу одну карту из колоды карт (36 шт.). Пусть $A=\{$карта пик$\}$, $B=\{$карта валет, дама, король$\}$. Вычислить P(A), P(B) и $P(A\cap B)$.

Пространство элементарных исходов состоит из 36 элементов $\Omega=\{$6 пик, 6 бубна, ... , туз пик, туз бубна, туз крести, туз черва$\}$. Число исходов, благоприятствующих событию A, равно 9 (число пик в данной колоде), т.е. $A=\{$6 пик, 7 пик, ..., туз пик$\}$. Итак, $n=36$, $m=9$ и

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{число пик}}{\text{общее число карт}}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}.$$

Число исходов, благоприятствующих событию B, равно 12, тогда

$$P(B)=\frac{\text{число карт: валет, дама, король}}{\text{общее число карт}}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.8. Пять человек, среди них А и Б, выбирают места в очереди к кассе. Какова вероятность того, что:

А и Б окажутся рядом, причем А впереди Б;
А и Б окажутся рядом;
между А и Б окажется ровно один кто-то третий;
между А и Б окажется В ?

3.9. Сколько разных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если каждую цифру можно использовать не более одного раза? Какова вероятность того, что наугад выбранное пятизначное число окажется:

четным; кратным 5;
имеющим в своей записи две четных цифры;
имеющим в своей записи четыре нечетных цифры?

3.10. В игре «Спортлото 5 из 36» участник наудачу зачеркивает 5 из 36 чисел, написанных на игровом поле. Найти вероятность того, что в результате тиража будет угадано:

три числа;
четыре числа;
все пять чисел;
ни одно число не будет угадано.

3.11. Из колоды карт в 36 листов наудачу извлекают 6 карт. Найти вероятность того, что среди вынутых карт будет:

6 карт одной масти;
4 туза;
дама и король одной масти;
ровно три козырных.

3.12. У человека имеется 10 ключей, из которых только один подходит к его двери. Он последовательно испытывает их (без возвращения). Найти вероятность того, что этот процесс закончится при:

первом;
втором;
третьем;
четвертом испытании.

3.13. Пять различных предметов размещают наудачу в пяти карманах. Найти вероятность того, что:

ни один карман не окажется пустым;
все предметы попадут в один карман;
ровно один карман окажется пустым;
первый карман окажется пустым.

3.14. Шесть пассажиров наудачу занимают место в трех вагонах метро. Найти вероятность того, что:

что в каждый вагон войдут два пассажира;
в первый вагон не войдет ни один пассажир;
все пассажиры войдут в один вагон;
в первый вагон войдут три, во второй - два, в третий - один пассажир.

3.15. Из колоды карт в 52 листа наудачу выбирают 13 карт. Найти вероятность того, что среди них окажутся:

ровно пять пик;
ровно пять пик и четыре трефы;
все четыре туза;
ровно четыре пики, четыре трефы, четыре бубны.

3.16. В лифт 12-этажного дома вошли 6 человек. Лифт делает 11 остановок. Найти вероятность того, что:

все пассажиры выйдут на одном этаже;
все пассажиры выйдут на разных этажах;
три данных пассажира выйдут на трех разных этажах, по одному на каждом;
три пассажира выйдут на одном этаже, три на другом.

3.17. Три мальчика и три девочки занимают наудачу 6 мест, идущих подряд в одном ряду зрительного зала. Найти вероятность того, что:

мальчики окажутся сидящими рядом;
между каждыми двумя мальчиками окажется девочка;
мальчики сядут на четные места, девочки - на нечетные;
ровно две девочки окажутся сидящими рядом.

3.18. Числа 1, 2, 3, 4, 5 наудачу выписывают одно за другим. Найти вероятность того, что:

крайнее левое число окажется меньше следующего за ним;
первое, третье и пятое число одно меньше другого;
второе и четвертое числа - четные;
первое и пятое числа - нечетные.

Тема 4. Вероятностное пространство с бесконечным числом исходов

Пусть пространство элементарных исходов счетно, т.е. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$. Как и в случае конечного Ω, каждому ω_i поставим в соответствие действительное число $p_i = P(\omega_i)$, называемое весом или вероятностью исхода ω_i, удовлетворяющее условиям:

1) $p_i \geq 0$, $i \geq 1$;

2) $\sum_{i \geq 1} p_i = 1$.

Вероятность события A определяется как и в случае конечного Ω, т.е. $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$. Пара (Ω, P) определяет вероятностное пространство случайного эксперимента со счетным числом исходов.

П р и м е р 4.1. Рассмотрим пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$ эксперимента, состоящего в бросании монеты до появления герба (здесь номер n означает число бросаний монеты), причем

ω_1 = Г, ω_2 = РГ, ω_3 = РРГ, ω_4 = РРРГ и т.д. Для построения вероятностного пространства достаточно положить

$$P(\omega_1)=\frac{1}{2},\ P(\omega_2)=\frac{1}{4},\ \dots,\ P(\omega_n)=\frac{1}{2^n}.$$

Если пространство элементарных исходов несчетно, предположим, что оно имеет конечную геометрическую меру $m(\Omega)$. Например, длину, площадь, объем. Тогда, если каждая точка Ω выбирается наудачу, т.е., если вероятность попадания точки в любую область пропорциональна её мере, вероятность события А определяется как

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

где $m(A)$ - мера области, принадлежащей Ω и благоприятной событию А. Следовательно,

$$P(A)=\frac{\text{длина } A}{\text{длина } \Omega},\quad P(A)=\frac{\text{площадь } A}{\text{площадь } \Omega},\quad P(A)=\frac{\text{объем } A}{\text{объем } \Omega}.$$

Вероятность события А, определенная таким образом, называется геометрической вероятностью.

Пример 4.2. На отрезок $[0,3]$ наудачу брошена точка, а на отрезок $[-2,0]$ той же оси наудачу брошена другая точка. Найти вероятность того, что расстояние между ними будет больше или равно 3.

Решение. Пусть x и y (рис. I) соответственно абсцисса первой и второй точек. Тогда пространство элементарных исходов

$$\Omega=\{(x,y):\ x\in[0,3];\ y\in[-2,0]\}.$$

Событие А = {расстояние между точками x и y больше или равно 3} = $=\{(x,y):\ x\in[0,3];\ y\in[-2,0];\ |x-y|\geq 3\}$.

Определим область Ω и А.

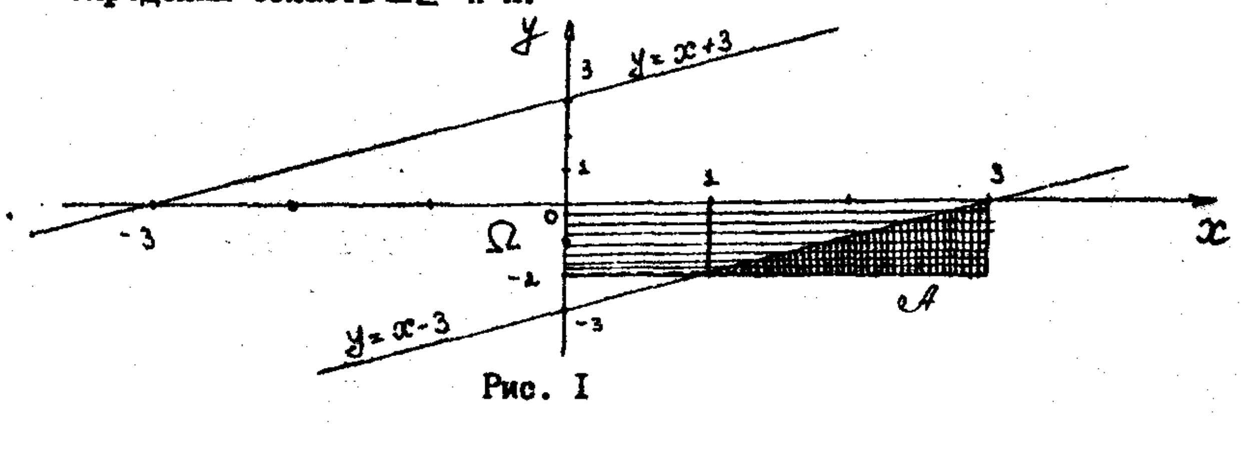


Рис. I

Область Ω – это прямоугольник со сторонами 2 и 3. Следовательно, $m(\Omega)$ совпадает с его площадью и $m(\Omega)=6$.

Для определения площади, благоприятствующей событию А, найдем область $|x-y|\geq 3$. Эта область есть объединение областей

$$\left[\begin{array}{l} x-y\geq 3 \\ x-y\leq -3 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} y\leq x-3 \\ y\geq x+3. \end{array}\right.$$

Пересечение области А и области Ω дает заштрихованную область, площадь которой m (A) = 2.

Итак,

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{\text{площадь A}}{\text{площадь } \Omega}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Примеры для решения

Пример 4.3. Точка брошена наудачу внутрь круга радиуса R с центром в начале координат. Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади этой области. Найти вероятность того, что точка находится от центра на расстоянии, меньшем r $(r<R)$.

Пример 4.4. В квадрат с вершинами (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) наудачу брошена точка М. Пусть (x,y) будут её координаты. Предполагается, что вероятность попадания в область, лежащую целиком внутри квадрата, зависит лишь от площади этой области и пропорциональна ей. Найти для $z\in\,]0,1[$:

а) $P\{|x-y|<z\}$; б) $P\{x\cdot y<z\}$; в) $P\{\min(x,y)<z\}$; г) $P\{\max(x,y)<z\}$; д) $P\{\frac{1}{2}(x+y)<z\}$.

Пример 4.5. На отрезке L длины 20 см помещен меньший отрезок ℓ длины 10 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная на больший отрезок, попадет также и на меньший отрезок.

Пример 4.6. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии 2а. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r<a$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.

Пример 4.7. На отрезке $[OA]$ длины L числовой оси Ох наудачу поставлены две точки $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что длина отрезка $|BC|$ будет меньше расстояния от точки 0 до ближайшей к ней точки.

Пример 4.8*. Определить вероятность того, что корни квадратного уравнения $x^2+2ax+b=0$ вещественны, если равновозможны значения коэффициентов в прямоугольнике $|a|\le n$, $|b|\le m$. Какова вероятность, что при данных условиях корни положительны?

Тема 5. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. НЕЗАВИСИМОСТЬ

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, P), A и B – события, т.е. $A\subset\Omega$ и $B\subset\Omega$.

Теорема. Если события A и B несовместны, то $P(A+B)=P(A)+(P(B))$. Если события A и B совместны, то $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Следствия:

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

2. Для трех событий A,B,C

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C).$$

3. Вероятность суммы нескольких несовместных событий равна сумме их вероятностей

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Определение. Пусть A-произвольное событие, $A\subset\Omega$ и E – событие такое, что $P(E) > 0$. Тогда, условной вероятностью события A при условии события E (обозначается $P(A/E)$) называется отношение

$$P(A/E) = \frac{P(A\cap E)}{P(E)}.$$

Определение. События A и E называются независимыми, если $P(A/E) = P(A)$ и $P(E/A) = P(E)$, если $P(A) > 0$, $P(E) > 0$.

Если Ω конечно и все исходы равновозможны, т.е. если имеет место классическое определение вероятности события, то, обозначив через

$|A|$ число элементов, содержащихся в множестве A, имеем

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \ P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}, \ P(A \cap E) = \frac{|A \cap E|}{|\Omega|}$$

и тогда

$$P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{|A \cap E|}{|E|},$$

или в данном случае условная вероятность события A при условии, что E уже произошло, равна

$$P(A/E) = \frac{\text{число исходов, благоприятных для } A \cap E}{\text{число исходов, благоприятных для } E}.$$

Пример 5.1. Бросают две игральные кости. В предположении, что сумма выпавших очков равна 6, вычислить вероятность того, что, по крайней мере, одна игральная кость дает 2. Другими словами, если $E = \{$сумма очков равна 6$\}$, $A = \{$по крайней мере одна кость дает 2$\}$, определить $P(A/E)$.

Решение. Запишем множество элементарных исходов $\Omega = \{(1,1)(1,2), \ldots, (1,6), (2,1), \ldots, (6,6)\}$. Тогда $E = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$, $A = \{(1,2), (2,1), (2,2), \ldots, (6,2), (2,6)\}$, $A \cap E = \{(2,4), (4,2)\}$ и тогда

$$|A \cap E| = 2, \ |E| = 5, \ P(A/E) = \frac{|A \cap E|}{|E|} = \frac{2}{5}.$$

Теорема. Умножение вероятностей зависимых событий.

Если события A и B зависимы, и $P(A) \neq 0$, то $P(B) \neq 0$ и

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Следствие. Для произвольных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ таких, что $P(A_i) > 0$, $i = \overline{1,n}$, имеем $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \ldots$
$\ldots P(A_n / A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{n-1})$.

Если события A и B независимы, то теорема умножения принимает вид

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Последнее выражение часто принимают за определение независимости событий.

Определение. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми, если $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$, и попарно независимыми, если $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$, $i \neq j$, и независимыми в совокупности, если $k: 1 \le k \le n$ и для любого набора индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k : 1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ $P\{\bigcap_{r=1}^{k} A_{i_r}\} = \prod_{r=1}^{k} P(A_{i_r})$.

Т е о р е м а. Если события A и B независимы, то независимы и события $\overline{B}$ и A, $\overline{B}$ и $\overline{A}$, B и $\overline{A}$.

П р и м е р 5.2. Партия товара содержит 12 изделий, среди которых 4 дефектны. Наудачу вынимают 3 изделия одно за другим. Вычислить вероятность того, что все 3 изделия хорошие.

<u>Решение.</u> Пусть $A_1 = \{$первое взятое изделие хорошее$\}$, $A_2 = \{$второе взятое изделие стандартно (хорошее)$\}$, $A_3 = \{$третье взятое изделие стандартно$\}$, $A = \{$все три взятых изделия стандартны$\}$.

Тогда, очевидно, что $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$,

$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2)$ и $P(A_1) = \frac{8}{12}$, так как имеется 8 стандартных изделий среди 12. Если первое взятое изделие стандартно, то вероятность вытащить второе изделие стандартным равна

$$P(A_2/A_1) = \frac{7}{11},$$

так как после того, как событие A_1 совершилось, осталось 7 хороших изделий из 11 оставшихся в партии. Очевидно, что после того, как совершилось событие, и A_1, и A_2 $P(A_3/A_1 \; A_2) = \frac{6}{10}$. Тогда

$$P(A) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{14}{55}.$$

П р и м е р 5.3. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу 3 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете (событие A).

<u>Решение.</u> П е р в ы й с п о с о б. Событие A произойдет, если произойдет любое из следующих трех несовместных событий: $B = \{$один учебник в переплете, два без переплета$\}$; $C = \{$два учебника в переплете, один без переплета$\}$; $\mathcal{D} = \{$три учебника в переплете$\}$. Тогда $A = B + C + \mathcal{D}$

и по теореме сложения $P(A) = P(B) + P(C) + P(\mathcal{D})$ найдем вероятности событий $B, C, \mathcal{D}$.

Очевидно, что $P(B) = \dfrac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3} = \dfrac{45}{91}$; $P(C) = \dfrac{C_5^2 \cdot C_{10}^1}{C_{15}^3} = \dfrac{20}{21}$;

$$P(\mathcal{D}) = \frac{C_5^3 \cdot C_{10}^0}{C_{15}^3} = \frac{2}{91} .$$

Тогда $P(A) = \dfrac{45}{91} + \dfrac{20}{91} + \dfrac{2}{91} = \dfrac{67}{91}$.

В т о р о й с п о с о б. При решении задач, состоящих в нахождении вероятности "хотя бы одного появления", целесообразно переходить к противоположному событию – $\bar{A} = \{$ни один из взятых учебников не имеет переплета$\}$. Так как $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, а вероятность противоположного события A считается очень просто $P(\bar{A}) = C_{10}^3 : C_{15}^3 = \dfrac{24}{91}$, то легко получаем требуемое, а именно:

$$P(A) = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91} .$$

Примеры для решения

П р и м е р 5.4. Для проверки качества продукции устроили двойной контроль. Каждый контролер работает независимо друг от друга. Вероятность того, что брак обнаружит первый контролер равна 0,95, второй – 0,9. Найти вероятность того, что бракованную деталь обнаружит только один контролер.

П р и м е р 5.5. Три охотника договорились стрелять в цель в определенной последовательности. Следующий охотник производит выстрел лишь в случае промаха предыдущего. Вероятности попадания в цель каждым из охотников одинаковы и равны 0,7. Найти вероятность того, что будет произведено выстрелов: а) один; б) два; в) десять.

П р и м е р 5.6. Подбрасывают две игральные кости. Какова вероятность появления хотя бы одной шестерки?

П р и м е р 5.7. По ведомостям о расходе запасных частей было установлено, что при ремонте автомобильных двигателей деталь № 1 заменялась в среднем в 36% случаев, деталь № 2 – в 42% случаев, а обе эти детали – в 30% случаев. Можно ли на основании этих данных сделать вывод о том, что замены деталей № I и № 2 связаны между собой? Найти вероятность замены детали № 2 при условии, что деталь № I заменена.

П р и м е р 5.8. Двадцать экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Студент может ответить на 35 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса из одного билета или на один вопрос из первого билета и на указанный дополнительный вопрос из другого билета.

П р и м е р 5.9. Имеются четыре бракованных изделия: на одном повреждена окраска, на другом имеется вмятина, на третьем – зазубрина, а на четвертом – одновременно все три дефекта. Пусть A,B,C – события, заключающиеся в том, что у первого наудачу взятого изделия повреждена окраска (A), имеются вмятина (B) или зазубрины (C). Являются ли данные события независимыми попарно и в совокупности?

Тема 6. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Пусть задано разбиение $H_1, H_2, \ldots, H_n$ множества элементарных исходов Ω, т.е. события $H_1, \ldots, H$ удовлетворяют следующим условиям:

$$1)\quad H_i \cap H_j = \varnothing,\ i \neq j;$$

$$2)\quad H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega,$$

и пусть событие A может наступить лишь при появлении одного из этих событий H_i, $i=\overline{1,n}$. Тогда

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P(A/H_i). \qquad (6.I)$$

Формула (6.I) называется формулой полной вероятности. События H_i – гипотезы, а их вероятности $P(H_i)$ – априорные (доопытные) вероятности.

Если событие А произошло в результате эксперимента, то можно переоценить вероятности гипотез по формуле

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)},$$

где $P(A)$ вычисляется по формуле полной вероятности. Вероятности $P(H_i/A)$ называют апостериорными (послеопытными) вероятностями гипотез.

Пример 6.1. В урну, содержащую 2 шара, опущен белый шар, после чего из неё наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров по цвету.

Решение. Обозначим через $A = \{$извлечен белый шар$\}$. Тогда возможны следующие гипотезы (предположения) относительно первоначального состава урны: $H_1 = \{$белых шаров нет$\}$; $H_2 = \{$один белый шар$\}$; $H_3 = \{$два белых шара$\}$.

Поскольку, по условию задачи, все три гипотезы равновозможны, значит

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Так как событие А может произойти с одной из заданных гипотез, то вероятность события А будем вычислять по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + P(H_3)\cdot P(A/H_3).$$

Вероятности гипотез $P(H_i)$ нами определены. Остается вычислить $P(A/H_i)$, $i = \overline{1,3}$. $P(A/H_1)$ – вероятность того, что будет извлечен белый шар при условии, что в урне первоначально не было белых шаров, равна $P(A/H_1) = \frac{1}{3}$, так как среди трех шаров, находящихся в урне после того, как туда опустили один белый шар, имеется только один белый шар.

Аналогично $P(A/H_2)$ – вероятность того, что будет извлечен белый шар, при условии, что первоначально в урне находился один белый шар, равна $P(A/H_2) = \frac{2}{3}$, и $P(A/H_3)$ – вероятность того, что будет извлечен белый шар, при условии, что первоначально в урне находятся два белых шара, равна $P(A/H_3) = \frac{3}{3} = 1$.

Тогда получим, что $P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$.

П р и м е р 6.2. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй - 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Решение. Обозначим через $A = \{$деталь отличного качества$\}$. Можно сделать два предположения (две гипотезы): $H_I = \{$деталь произведена первым автоматом$\}$, $H_2 = \{$деталь произведена вторым автоматом$\}$. Поскольку первый автомат производит вдвое больше деталей, чем второй, очевидно, что $P(H_I) = \frac{2}{3}$, $P(H_2) = \frac{I}{3}$. Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена первым автоматом, $P(A/H_I) = 0{,}6$, а условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена вторым автоматом, $P(A/H_2) = 0{,}84$. Тогда можно вычислить вероятность того, что наудачу взятая деталь отличного качества. По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_I)\cdot P(A/H_I) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) = \frac{2}{3}\cdot 0{,}6 + \frac{I}{3}\cdot 0{,}84 = 0{,}68.$$

Наша задача заключается в переоценке вероятности гипотез, а именно: нам нужно вычислить вероятность того, что взятая деталь отличного качества произведена первым автоматом, т.е. нужно вычислить

$$P(H_I/A) = \frac{P(H_I)\cdot P(A/H_I)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot 0{,}6}{0{,}68} = \frac{I0}{I7}.$$

Примеры для решения

П р и м е р 6.3. Два предприятия пищевой промышленности (из трех) выполнили план по выпуску продукции. Найти вероятность того, что третье предприятие выполнило план, если вероятности выполнения плана первым, вторым и третьим предприятиями соответственно равны 0,6; 0,5; 0,4.

П р и м е р 6.4. Три завода поставляют в магазин электролампы: первый – 45%, второй – 40% и третий – 15% общего количества продаваемых ламп. Продукция первого завода содержит 10%, второго –12% и третьего – 5% брака. Какова вероятность того, что купленная в магазине лампа годна к употреблению?

П р и м е р 6.5. Рабочий обслуживает пять станков. 20% времени он уделяет первому станку, 10% – второму, 18% – третьему, 25% – четвертому и 30% – пятому. Какова вероятность, что случайно заглянувший в цех мастер найдет рабочего: а) у первого или третьего станка, б) у первого или пятого станка; в) у первого или четвертого станка; г) у первого или второго, или третьего станка.

П р и м е р 6.6. По самолету стреляют залпом три орудия. Вероятности попасть для каждого из них соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7. Самолет будет сбит наверняка при трех попаданиях. При двух попаданиях он будет сбит с вероятностью 0,6, при одном – 0,2. Определить вероятность того, что самолет будет сбит в результате одного залпа.

П р и м е р 6.7. Определить вероятность того, что среди 1000 лампочек нет ни одной неисправной, если из взятых наудачу 100 лампочек все оказались исправными. Предположения, что число неисправных лампочек из 1000 равновозможно от 0 до 5.

П р и м е р 6.8. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность брака на первом станке – 0,02, на втором – 0,03, на третьем – 0,04. Изготовленные детали складываются в ящик. Производительность 1-го станка в 3 раза больше 2-го, а 3-го в два раза меньше 1-го. Определить вероятность того, что наудачу взятая деталь бракованная.

П р и м е р 6.9. Отдел материально — технического снабжения получает детали для завода на одном из 3-х складов железнодорожного вокзала. Вероятность того, что очередная партия будет получена с первого склада равна 1/2, со второго – 1/3, с третьего – 1/6. Вероятности того, что деталей, необходимых снабжению, уже нет на складах, такие: 1- 0,2;

П- I/6; Ш- I/8. Снабженец обратился в один из складов и получил необходимые детали. Определить вероятность, что это он сделал на первом складе.

П р и м е р 6.I0. Для управления процессом производства в сложившейся ситуации предложено пять вариантов. Если технолог выберет первый вариант, то вероятность получить прибыль составляет 0,6; если второй- 0,3; третий - 0,2; четвертый - 0,I; пятый - 0,I. Какова вероятность, что технолог выбрал первый вариант, если получена прибыль?

Тема 7. ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Предположим, что имеется некоторый эксперимент с двумя исходами: A и $\bar{A}$ и вероятность появления события A- $P(A)=p$, а $P(\bar{A})=q$, причем $p+q=1$ или $q=1-p$. Будем повторять этот эксперимент n - раз так, что вероятность появления события A (или $\bar{A}$) в каждом i - м испытании $(i=\overline{1,n})$ не зависит от исходов других испытаний и равна p. Такую последовательность испытаний называют схемой Бернулли, а само (i-ое) испытание, т.е. испытание с двумя исходами, - испытанием Бернулли.

Основной вопрос, касающийся схемы Бернулли, заключается в вычислении вероятности $P_n(k)$- того, что в n независимых испытаниях событие A появится ровно k раз. Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а. Если в каждом из n независимых испытаний вероятность появления события A постоянна и равна p, то

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k=\overline{0,n},$$

где $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ - число сочетаний из n по k.

Второй вопрос, касающийся схемы Бернулли, заключается в определении наивероятнейшего числа наступления события A, т.е. такого числа k_0, вероятность которого $P_n(k_0)$ наибольшая, т.е.

$$P_n(k_0)\geq P_n(k), \quad \forall k\neq k_0 .$$

Наивероятнейшее число k_0 определяется из двойного неравенства

$$np-q\leq k_0\leq np+p, \qquad (7.I)$$

а) если число $np-q$ дробное, то существует одно наивероятнейшее число;

б) если число $np-q$ целое, то существуют два наивероятнейших числа, а именно:

$$k_0 = np - q \ , \ k_0' = k_0 + 1 = np + p.$$

Пример 7.1. Некоторое предприятие с одинаковой возможностью выполняет или не выполняет квартальный план по выпуску продукции. Что вероятнее для такого предприятия: выполнить план одного квартала из двух или двух кварталов из четырех? Определить наивероятнейшее число кварталов, в течение которых предприятие выполнит план (рассмотреть промежуток времени в один год).

<u>Решение.</u> Так как возможность выполнения плана и его невыполнения одинаковы, то если обозначить через $A = \{$предприятие выполнило план одного квартала$\}$, то $P(A) = \frac{1}{2}$ и $q = 1 - p = P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$, где $P(\bar{A})$ – вероятность того, что предприятие не выполнит план одного квартала. Так как в каждом квартале (по условию задачи) вероятность выполнения плана постоянна и не зависит от того, что имело место в предыдущем квартале, то для решения задачи можно применить формулу Бернулли.

Найдем вероятность того, что в одном квартале из двух предприятие выполнит план. Эта вероятность равна

$$P_2(1) = C_2^1 \, p \, q = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Найдем вероятность того, что в двух кварталах из четырех предприятие выполнит план. Эта вероятность равна

$$P_4(2) = C_4^2 \, p^2 q^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}.$$

Так как $P_2(1) > P_4(2)$, то вероятнее выполнить план в одном квартале из двух, чем в двух из четырех.

Вычислим теперь наивероятнейшее (ожидаемое) число кварталов в течение года, когда предприятие выполнит план.

Имеем $np - q \le K_0 \le np + p$, где $n = 4$, $p = q = \frac{1}{2}$. Тогда $4\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \le K_0 \le 4\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ или $1,5 \le K_0 \le 2,5$.

Так как K_0 - целое число и поскольку между I,5 и 2,5 заключено одно целое число, а именно: 2, то искомое ожидаемое число кварталов, в течение которых предприятие выполнит план, $K_0 = 2$ или $K_0 = np = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$.

Пример 7.2. Работники предприятия получат в конце года тринадцатую зарплату в полном объеме, если в течение не менее трех кварталов из четырех, предприятие выполнит план. Определить вероятность получения тринадцатой зарплаты, если вероятность выполнения предприятием плана в каждом квартале постоянна и равна 0,8.

Решение. Обозначим через A = {предприятие выполнило квартальный план}, B = {работники предприятия получили 100% тринадцатой зарплаты}, причем P(A) = 0,8, а вероятность события B нам нужно определить. Очевидно, что

$$P(B) = P_4(3) + P_4(4),$$

где $P_4(3)$ и $P_4(4)$ - вероятность того, что в течение ровно трех (четырех) кварталов предприятие выполнит план и

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q = C_4^1 p^3 q,$$

$$P_4(4) = C_4^4 p^4 q^0 = C_4^0 p^3 q^0,$$

где $p = P(A) = 0,8$; $q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2$.

Итак,

$$P_4(3) = 4 \cdot (0,8)^3 \cdot 0,2 = \frac{256}{625};$$

$$P_4(4) = (0,8)^4 = 0,8^4 = \frac{256}{625};$$

$$P(B) = \frac{512}{625} = 0,82.$$

Примеры для решения

Пример 7.3. Монету бросили 5 раз. Найти вероятность того, что герб появится: а) ровно два раза; б) не более двух раз; в) не менее двух раз или хотя бы один раз, зная, что монета правильная.

П р и м е р 7.4. Четыре процента деталей, изготовляемых в цехе, обычно бракуются. Для контроля было взято 6 деталей. Какова вероятность того, что среди них ровно 2 бракованные? Нет бракованных? Все бракованные?

П р и м е р 7.5. В квартире 4 электролампочки. Для каждой лампочки вероятность того, что она останется исправной в течение года, равна 5/6. Какова вероятность того, что в течение года придется заменить не меньше половины лампочек?

П р и м е р 7.6. В лагере m пионеров. Они зажгли n костров и случайным образом распределились около них. Какова вероятность того, что у первого костра сели k пионеров?

П р и м е р 7.7. В магазин вошли 8 покупателей. Найти вероятность того, что 3 из них совершат покупку, если вероятность совершить покупку для каждого равна 0,3.

П р и м е р 7.8. Сколько раз нужно подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число выпаданий двойки было равно 32?

П р и м е р 7.9. На станке изготовили 90 деталей. Чему равна вероятность изготовления на этом станке детали первого сорта, если наивероятнейшее число таких деталей в данной партии равно 82 ?

Тема 8. ЛОКАЛЬНАЯ И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМЫ ЛАПЛАСА. ТЕОРЕМА ПАУССОНА

При достаточно большом числе n опытов (экспериментов) использование формулы Бернулли для вычисления вероятности $P_n(k)$ становится затруднительным. В этом случае применяют следствия из предельных теорем.

С л е д с т в и е из локальной теоремы. Вероятность $P_n(k)$ того, что в n - независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события А равна $p\,(0<p<1)$, это событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности)

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x_0).$$

Здесь $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\qquad x_0 = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, а функция $\varphi(x)$ для положительных x затабулирована. Для вычисления значения $\varphi(x)$ в отрицательной точке используется свойство четности этой функции, т.е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$, а при $x\geq 4$ полагают $\varphi(x)=0$.

Следствие из теоремы Пуассона. Вероятность $P_n(k)$ того, что в n - независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события А постоянна и равна p, причем p близко к нулю или к единице, событие А наступит ровно k раз

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

где $\lambda=np$.

Таким образом, в противовес следствию из локальной теоремы Лапласа, которая дает возможность вычислить $P_n(k)$ при больших n и p, отличной от нуля и единицы, теорема Пуассона позволяет вычислить эту вероятность при p, близких к нулю.

Следствие из интегральной теоремы Лапласа. Вероятность $P_n(k_1,k_2)$ того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события А постоянна и равна $p\ (0<p<1)$, событие А наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз

$$P_n(k_1,k_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

где

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz,$$

называется функцией Лапласа. Причем:

1) $\Phi(-x)=-\Phi(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(x)=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(x)=-\frac{1}{2}$,

и значение функции $\Phi(x)$ затабулировано:

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\qquad x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблица значений функции $\Phi(x)$ составлена для положительных значений $x\ (0\leq x\leq 5)$, для значений $x>5$ полагают $\Phi(x)\approx 0,5$. Для отрицательных x используют свойство нечетности функции $\Phi(x)$ (свойство 1).

Пусть проведено n испытаний Бернулли и пусть $\nu(A)$ - число испытаний, в которых появилось событие A. Тогда $\frac{\nu(A)}{n}$ называется относительной частотой события A.

Используя следствие из интегральной теоремы Лапласа, можно оценить вероятность отклонения относительной частоты некоторого события A от вероятности P(A) этого события, а именно: имеет место следующая теорема, являющаяся непосредственным следствием интегральной теоремы Лапласа.

Т е о р е м а. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна $p (0<p<1)$, абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события A - $\frac{\nu(A)}{n}$, от вероятности $p = P(A)$ появления этого события не превысит положительного числа $\varepsilon > 0$:

$$P\left\{ \left| \frac{\nu(A)}{n} - p \right| \le \varepsilon \right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (8.1)$$

Правая часть не зависит от $\nu(A)$, а зависит только от ε, n, p, q, причем $q = 1-p$. Поэтому формула (8.I) позволяет определить любую из указанных характеристик, а также границы изменения $\nu(A)$, а именно: из неравенства

$$\left| \frac{\nu(A)}{n} - p \right| \le \varepsilon$$

следует, что границы изменения $\nu(A)$ определяются формулой

$$n(p-\varepsilon) \le \nu(A) \le n(p+\varepsilon).$$

П р и м е р 8.I. На заводе трудится 2800 человек, среди которых 300 ударников труда. Каждый рабочий завода взял обязательство к концу года добиться этого почетного звания. Определить наивероятнейшее число ударников коммунистического труда на конец года, если известно, что в среднем 20% рабочих могут добиться звания и вычислить вероятность появления этого числа ударников (считаем, что уже имеющиеся ударники труда остаются ими в конце года).

<u>Решение.</u> Число имеющихся ударников коммунистического труда в дальнейшем расчете не учитываем. Тогда число рабочих, борющихся за звание

ударника коммунистического труда, будет $n = 2500$. Пусть событие A = $\{$произвольно взятый рабочий станет ударником$\}$. Тогда $P(A) = p = 0{,}2$, а $q = 1 - p = 0{,}8$ – вероятность того, что рабочий не станет ударником труда. По формуле (7.I) получим, что наивероятнейшее число k_0 ударников коммунистического труда в конце года определится из неравенства

$$2500 \cdot 0{,}2 - 0{,}8 \le k_0 \le 2500 \cdot 0{,}2 + 0{,}2$$

Или

$$499{,}2 \le k_0 \le 500{,}2.$$

Итак, $k_0 = 500$.

Определим вероятность появления данного числа ударников коммунистического труда, воспользовавшись для этого следствием из локальной теоремы Лапласа. Имеем: $n = 2500$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, $k = 500$. Тогда

$$P_{2500}(500) \approx \frac{1}{\sqrt{2500 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot \varphi(x_0) = \frac{1}{20}\varphi(x_0),$$

где

$$x_0 = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{500 - 2500 \cdot 0{,}2}{\sqrt{2500 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 0.$$

Итак, $P_{2500}(500) \approx 0{,}05 \cdot \varphi(0) = 0{,}05 \cdot 0{,}3989 = 0{,}01944$.

П р и м е р 8.2. Рассмотрим предыдущую задачу и вычислим вероятность того, что число вновь появившихся ударников труда: а) будут заключены в пределах от 400 до 600; б) будет не менее 600; в) будет не более 400.

Решение. а) Воспользуемся следствием из интегральной теоремы Лапласа, так как $p = 0{,}2$. По условию $n = 2500$, $q = 0{,}8$, $k_1 = 400$, $k_2 = 600$. Вычислим x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{400 - 2500 \cdot 0{,}2}{\sqrt{2500 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -5; \quad x_2 = \frac{600 - 2500 \cdot 0{,}2}{\sqrt{2500 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 5.$$

Тогда $P_{2500}(400, 600) \cong \Phi(5) - \Phi(-5) = 2\Phi(5) = 1.$

Итак, видим, что с вероятностью единица число вновь появившихся ударников коммунистического труда будет заключено в интервале от 400 до 600.

б) Вычислим теперь $P_{2500}(\geqslant 600)$ - вероятность того, что число ударников труда будет не менее 600, т.е. больше или равно 600 человек. Имеем

$$P_{2500}(\geqslant 600) \cong P_{2500}(600;\ 2500) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где

$$x_1 = \frac{600 - 500}{20} = 5; \quad x_2 = \frac{2500 - 500}{20} = 100$$

и $P_{2500}(600;\ 2500) \approx \Phi(100) - \Phi(5) = 0$.

в) Вычислим вероятность $P_{2500}(\leqslant 400)$ того, что число ударников труда будет не более 400. В этом случае, очевидно, $K_1 = 0$, $K_2 = 400$ и

$$P_{2500}(\leqslant 400) = P_{2500}(0;400) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где

$$x_1 = \frac{0 - 500}{20} = -25; \quad x_2 = \frac{400 - 500}{20} = -5$$

и

$$P_{2500}(0;\ 400) \approx \Phi(-5) - \Phi(-25) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Итак, анализ результатов решения данной задачи показывает, что вероятность событий $B_1 = \{$число вновь появившихся ударников больше 600$\}$ и $B_2 = \{$число вновь появившихся ударников меньше 400$\}$ равны нулю, т.е. они почти не произойдут в условиях нашего эксперимента.

Пример 8.3. На первом курсе экономического факультета учится 150 студентов. Найти вероятность того, что 8 марта ни для одного из них не является днем рождения.

Решение. Пусть событие $A = \{$день рождения наудачу взятого студента - 8 марта$\}$. Тогда вероятность этого события $p = P(A) = \frac{1}{365}$, нам нужно вычислить вероятность $P_{150}(0)$ - того, что ни у одного из 150 студентов нет дня рождения 8 марта. Итак, имеем $n = 150$, $K = 0$ и $p = \frac{1}{365}$ близка к нулю. Для вычисления $P_{150}(0)$ воспользуемся следствием из теоремы Пуассона. Имеем

$$P_{150}(0) \approx \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np = \frac{150}{365}$

Тогда

$$P_{150}(0) \approx 0{,}663.$$

П р и м е р 8.4. Отдел технического контроля проверяет на стандартность партию деталей. Вероятность того, что деталь стандартная постоянна для всех изделий и равна 0,9. Найти число проверяемых деталей n, при котором с вероятностью 0,9876 можно ожидать, что относительная частота появления нестандартной детали отклонится от её вероятности по абсолютной величине не более, чем на 0,02.

Решение. По условию задачи, нужно найти число деталей n, которое нужно проверить, чтобы оценить вероятность появления нестандартной детали. Пусть событие А = {проверенная деталь нестандартна}. Тогда
$P(A)=p=0,1$; $q=1-p=0,9$; $\varepsilon=0,02$;

и $$P\left\{\left|\frac{\nu(A)}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=0,9876$$

Для нахождения n воспользуемся соотношением (8.I). Имеем
$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\approx 0,9876$$
или
$$\Phi\left(0,02\sqrt{\frac{n}{0,1\cdot 0,9}}\right)\approx 0,4938.$$

По таблице значений функции $\Phi(x)$ находим, что $\Phi(2,5)=0,4938$. Следовательно,
$$\frac{2}{30}\sqrt{n}=2,5$$
или
$$\sqrt{n}\approx 37,5.$$
Отсюда получаем, что искомое число испытаний равно $n\approx 1406$.

Примеры для решения

П р и м е р 8.5. Игральная кость налита свинцом таким образом, что выпадение каждой грани пропорционально числу очков на ней. Чему равна вероятность того, что при 98 подбрасываниях четное число очков выпадет наивероятнейшее число раз?

П р и м е р 8.6. Чему равна вероятность того, что среди 100 случайных прохожих окажутся 32 женщины (число женщин и мужчин в городе одинаково).

П р и м е р 8.7. По данным телевизионного ателье в течение гарантийного срока выходит из строя в среднем 12% кинескопов. Какова вероятность того, что из 46 наугад выбранных кинескопов 36 проработают гарантийный срок?

Пример 8.8. Бюффон бросил монету 4090 раз. При этом герб выпал 2048 раз. С какой вероятностью можно было ожидать этот результат?

Пример 8.9. Среднее число заявок, поступивших на предприятие бытового обслуживания за I час, равно четырем. Найти вероятность того, что за 3 часа поступит: I) 6 заявок; 2) не менее 6 заявок; 3) менее 6 заявок.

Пример 8.10. Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,02. Сверла укладываются в коробки по 100 штук. Чему равна вероятность того, что в коробке не окажется бракованных сверл? Окажется ровно одно бракованное сверло?

Пример 8.11. Среди семян пшеницы 0,6% сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 1000 семян обнаружить ровно 6 семян сорняков?

Пример 8.12. При установившемся технологическом процессе фабрика выпускает в среднем 70% продукции первого сорта. Чему равна вероятность того, что в партии из 1000 изделий число первосортных заключено между 652 и 760 ?

Пример 8.13. На склад поступает продукция трех фабрик, причем изделия первой фабрики на складе составляют 30%, второй - 32%, третьей - 38%. В продукции первой фабрики 60% изделий высшего сорта, второй - 25%, третьей - 50%. Найти вероятность того, что среди 300 наудачу взятых со склада изделий число изделий высшего сорта заключено между 130 и 170 ?

Пример 8.14. С конвейера сходит в среднем 85% изделий отличного качества. Сколько изделий следует изготовить, чтобы с вероятностью 0,997 отклонение частоты изделий отличного качества от вероятности не превосходило по абсолютной величине 0,01 ?

Тема 9. ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В теории вероятностей произвольное отображение $\xi : \Omega \to R_1$, пространства $\Omega = \{\omega\}$ элементарных событий в действительную прямую R_1

принято называть действительной случайной величиной. Случайная величина - это величина, принимающая те или иные значения в зависимости от случая. Очевидно, что если $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ - две случайные величины, заданные на одном и том же множестве элементарных исходов, то и функции $\xi(\omega)+\eta(\omega)$, $K\xi(\omega)$, $K+\xi(\omega)$, $\xi(\omega)\cdot\eta(\omega)$, $\xi^n(\omega)$ и т.д., также являются случайными величинами.

Определение. Всякая действительная функция $\xi=\xi(\omega)$ на Ω такая, что для каждого действительного $x\in R_1$, $\{\omega:\xi(\omega)<x\}$ событие называется действительной случайной величиной.

Пусть ξ - случайная величина, определенная на $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n\}$, принимает конечное множество значений x_1, x_2, ..., x_n, т.е. $x_i=\xi(\omega)$, ($i\geq 1$) называется дискретной случайной.

Определим $p_i=P\{\xi=x_i\}=P\{\omega:\xi(\omega)=x_i\}$. Очевидно, что

$$1)\ p_i\geq 0;\quad 2)\ \sum_{i=1}^{n}p_i=1.$$

Множество чисел (x_i, p_i), $i=\overline{1,n}$ называют законом распределения дискретной случайной величины и обычно задают в виде таблицы

ξ: x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p_i=P\{\xi=x_i\}$	p_1	p_2	...	p_n

Закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки с координатами (x_i, p_i), т.е. $M_1(x_1,p_1)$, $M_2(x_2,p_2)$, ..., $M_n(x_n,p_n)$, и соединяют их отрезками. Полученную ломаную называют многоугольником (или полигоном) распределения.

Если же $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots\}$ содержит счетное число элементарных исходов, то, как и в случае конечного числа элементарных исходов, можно определить случайную величину, заданную на Ω и принимающую счетное множество значений $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Дискретная случайная величина ξ, принимающая значения от 0 до n и равная числу появления события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события А постоянна и равна p, называется бернуллиевской случайной величиной, причем

$$p_k = P\{\xi(\omega)=k\} = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Дискретная случайная величина ξ, принимающая значения от 0 до ∞, причем

$$p_k = P\{\xi(\omega)=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda > 0$ – параметр, называется пуассоновской случайной величиной.

П р и м е р 9.1. Рассмотрим следующий эксперимент: дважды бросают монету. Тогда $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$. Определим случайную величину $\xi = \xi(\omega)$ на Ω следующим образом:

ω_i	ГГ	ГР	РГ	РР
$\xi(\omega)$	2	1	1	0

Очевидно, что случайная величина ξ есть не что иное, как число появлений гербов в данном эксперименте. Определим закон распределения заданной случайной величины ξ. Для этого вычислим p_i, $i = 0,1,2$. Вначале построим вероятностное пространство (Ω, P). Имеем

$$P\{ГГ\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \qquad P\{РГ\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$P\{ГР\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \qquad P\{РР\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Теперь можно вычислить p_i. Очевидно, что

$$p_0 = P\{\xi(\omega)=0\} = P\{\omega : \xi(\omega)=0\} = P\{РР\} = \frac{1}{4};$$

$$p_1 = P\{\xi(\omega)=1\} = P\{РГ, ГР\} = P\{РГ\} + P\{ГР\} = \frac{1}{2};$$

$$p_2 = P\{\xi(\omega)=2\} = P\{\omega : \xi(\omega)=2\} = P\{ГГ\} = \frac{1}{4}.$$

Итак, закон распределения случайной величины ξ имеет вид

ξ:

x_i	0	1	2
p_i	1/4	1/2	1/4

Построим теперь многоугольник распределения данной случайной величины (рис.2):

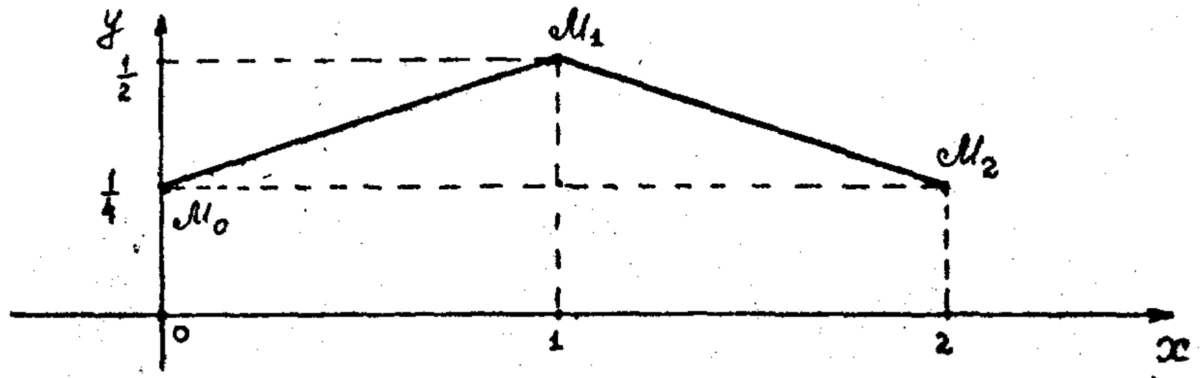


Рис. 2

Система двух и более случайных величин. Закон распределения двух и более случайных величин. Независимость случайных величин

Рассмотрим две случайные величины $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$, причем множества их значений дискретны, а именно; пусть

$$\xi_1(\omega) \in X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

$$\xi_2(\omega) \in Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}.$$

Двумерной дискретной случайной величиной называют случайную величину $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$, возможные значения которой есть пары чисел (x_i, y_j), $i=\overline{1,n}; j=\overline{1,m}$. Закон распределения двумерной дискретной случайной величины определяется указанием вероятностей каждой её пары, т.е. заданием вероятностей $P\{\xi_1(\omega)=x_i, \xi_2(\omega)=y_j\} = P(x_i, y_j)$.

Эти вероятности удовлетворяют следующим условиям:

1) $P(x_i, y_j) \geq 0$;

2) $\sum\limits_{x_i} P(x_i, y_j) = P\{\xi_2(\omega)=y_j\} = P(y_j)$;

$\sum\limits_{y_j} P(x_i, y_j) = P\{\xi_1(\omega) = x_i\} = P(x_i)$.

Совокупность значений $(y_j, P(y_j)), (x_i, P(x_i))$ в данном случае называют частными (маргинальными) законами распределения;

3) $\sum\limits_{y_i, y_j} P(x_i, y_j) = 1$.

Понятие системы двух случайных величин обобщается на случай любого конечного числа случайных величин $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$. В данном случае нужно указать вероятность того, что

$$P\{\xi_1(\omega)=x_i, \xi_2(\omega)=y_j, \ldots, \xi_n(\omega)=z_k\} = P\{x_i, y_j, \ldots, z_k\}.$$

Эта вероятность обладает свойствами, аналогичными свойствам I–3.

О п р е д е л е н и е. Две случайные величины $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ называются независимыми, если

$$P(x_i, y_j) = P\{\xi_1(\omega)=x_i, \xi_2(\omega)=y_j\} = P\{\xi_1(\omega)=x_i\} P\{\xi_2(\omega)=y_j\}$$

для любых возможных значений x_i и y_j.

Аналогично этому можно дать определение независимости любого конечного числа случайных величин.

О п р е д е л е н и е. Случайные величины $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega)$, ..., $\xi_n(\omega)$ называются независимыми (независимыми в совокупности), если имеет место равенство

$$P\{\xi_1(\omega)=x_i, \xi_2(\omega)=y_j, \ldots, \xi_n(\omega)=z_k\} = P\{\xi_1(\omega)=x_i\} \cdot P\{\xi_2(\omega)=y_j\} \cdot \ldots \cdot P\{\xi_n(\omega)=z_k\}$$

для всех значений $x_i, y_j, \ldots, z_k$.

П р и м е р 9.2. Пусть ξ и η – случайные величины, совместная функция распределения которых равна

$\xi \backslash \eta$	2	3	4	Сумма
I	0,06	0,I5	0,09	0,3
2	0,I4	0,35	0,2I	0,7
Сумма	0,2	0,5	0,3	I,0

Частные (маргинальные) распределения случайных величин ξ и η имеют вид

ξ:

x_i	I	2
p_i	0,3	0,7

η:

y_j	2	3	4
p_j	0,2	0,5	0,3

Случайные величины ξ и η являются независимыми; вероятность совместного появления любой пары $(x_i; y_j)$ может быть получена умножением маргинального закона одной случайной величины на другой, т.е.

$$P(1,2) = 0,06 = P(1) \times P(2) = 0,3 \times 0,2$$

$$P(1,3) = 0,15 = P(1) \times P(3) = 0,3 \times 0,5$$

и т.д., т.е. $P(x_i, y_j) = P(x_i)P(y_j)$ для любого x_i и y_j.

Примеры для решения

Пример 9.3. Два игрока играют на следующих условиях: монету подбрасывают три раза. Если при подбрасывании выпадет "герб", то первый отдает второму 1 рубль, а если выпала "решетка", то второй отдает первому 1 рубль. Написать ряд распределений для каждого из игроков, если случайная величина характеризует сумму выигрыша.

Пример 9.4. Независимые случайные величины ξ и η заданы своими рядами распределений соответственно

ξ:

x_i	-1	0	1
$P(x_i)$	0,3	0,4	0,3

η:

y_j	-2	0	1	3
$P\{y_j\}$	0,2	0,1	0,4	0,3

Составить распределение их суммы $\xi+\eta$ и их произведения $\xi\cdot\eta$.

Пример 9.5. Два человека стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле первым стрелком равна 0,6, вторым - 0,7. Составить закон распределения случайной величины, выражающей число попаданий в мишень, если каждый стрелок: а) сделает по одному выстрелу; б) по два выстрела.

Пример 9.6. Независимые случайные величины ξ и η заданы законами распределения

	2	3	5
	0,4	?	0,5

	2	4
	?	0,3

Найти распределение $\xi-\eta$ и $\frac{\xi}{\eta}$.

Пример 9.7. Совместное распределение (ξ_1, ξ_2) задано формулами:

$$P\{\xi_1=-1, \xi_2=-1\} = P\{\xi_1=0, \xi_2=-1\} = P\{\xi_1=1, \xi_2=-1\} = \frac{1}{6};$$
$$P\{\xi_1=-1, \xi_2=1\} = P\{\xi_1=0, \xi_2=1\} = P\{\xi_1=1, \xi_2=1\} = \frac{1}{6}.$$

Найти одномерное распределение ξ_1, ξ_2 и распределение величин $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$; $\eta_2 = \xi_1 \cdot \xi_2$.

Пример 9.8. Совместное распределение случайных величин ξ и η задано таблицей

η \ ξ	-I	0	I
-I	I/8	I/I2	7/24
I	3/24	I/6	I/8

Найти одномерные законы распределения ξ и η: а) $\xi-\eta$; б) $\xi+\eta$; в) $\xi\cdot\eta$; г) $\frac{\xi}{\eta}$.

Пример 9.9. Найти распределение суммы двух ξ_1, ξ_2 независимых случайных величин, если слагаемые распределены по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2.

Тема I0. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Предположим, что $\xi = \xi(\omega)$ - дискретная случайная величина, принимающая конечное число значений $X = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$. Тогда математическим ожиданием случайной величины $\xi(\omega)$ (обозначается $M\xi$) называется число

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Свойства математического ожидания:

I. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной, т.е.

$$MC = C.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т.е. $M(C\xi) = CM\xi$.

3. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий, т.е.

$$M(\xi+\eta) = M\xi + M\eta.$$

С л е д с т в и е I. Математическое ожидание суммы конечного числа случайных величин равно сумме их математических ожиданий, т.е.

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M\xi_i.$$

4. Математическое ожидание произведения двух взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий, т.е., если ξ и η независимы, то

$$M(\xi\,\eta) = M\xi \cdot M\eta.$$

С л е д с т в и е 2. Математическое ожидание произведения конечного числа независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

5. Математическое ожидание бернуллиевской случайной величины ξ равно $M\xi = np$, где n - число испытаний (экспериментов).

6. Математическое ожидание пуассоновской случайной величины ξ равно $M\xi = \lambda$.

Д и с п е р с и е й $\mathcal{D}\xi$ случайной величины называется число $\mathcal{D}\xi = M(\xi - M\xi)^2$, $\mathcal{D}\xi = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M\xi)^2 p_i$. Средним квадратическим отклонением σ_ξ случайной величины ξ называется $\sigma_\xi = \sqrt{\mathcal{D}\xi}$. Начальным моментом k - го порядка α_k - случайной величины ξ называется $\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$, а центральным моментом k - го порядка μ_k называют число $\mu_k = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M\xi)^k p_i$. Очевидно, что $\alpha_1 = M\xi$, $\mu_2 = \mathcal{D}\xi = \alpha_2 - \alpha_1^2$.

С в о й с т в а д и с п е р с и и:

I. Дисперсия постоянной величины равна нулю, т.е. $\mathcal{D}C = 0$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат, т.е. $\mathcal{D}(C\xi) = C^2\mathcal{D}\xi$.

3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых, т.е.

$$\mathcal{D}(\xi+\eta) = \mathcal{D}\xi + \mathcal{D}\eta .$$

Следствие. Дисперсия суммы конечного числа независимых случайных величин равна сумме их дисперсий, т.е.

$$\mathcal{D}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}\xi_i .$$

4. Дисперсия бернуллиевской случайной величины равна $\mathcal{D}\xi = npq$.

5. Дисперсия пуассоновской случайной величины ξ равна $\mathcal{D}\xi = \lambda$

Пусть заданы две случайные величины ξ и η над одним и тем же пространством элементарных исходов. Говорят, что η есть функция от ξ, если η можно представить в виде $\eta = f(\xi)$ для некоторой функции $f(x)$, т.е. если $\eta(\omega) = f(\xi(\omega))$. Тогда, если $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ – дискретные случайные величины, то $M\eta = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)p_i$.

Теперь можно сказать, что $\alpha_k = M\xi^k$ и $\mu_k = M(\xi - M\xi)^k$.

Пусть заданы две случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$. Ковариацией этих случайных величин называют величину

$$Cov(\xi,\eta) = M[(\xi - M\xi)\cdot(\eta - M\eta)] .$$

Если $\mathcal{D}\xi > 0$ и $\mathcal{D}\eta > 0$, то величина

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{Cov(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathcal{D}\xi}\sqrt{\mathcal{D}\eta}} = \frac{Cov(\xi,\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta}$$

называется коэффициентом корреляции случайных величин ξ и η.

Легко показать, что

$$Cov(\xi,\eta) = \sum_{x_i, y_j} (x_i - M\xi)(y_j - M\eta) P(x_i, y_j) =$$

$$= \sum_{x_i y_j} x_i y_j P(x_i, y_j) - M\xi \cdot M\eta = M(\xi\eta) - M\xi \cdot M\eta .$$

Коэффициент корреляции обладает следующими свойствами:

1) $\rho(\xi,\eta) = \rho(\eta,\xi)$;

2) $-1 \le \rho(\xi,\eta) \le 1$

3) $\rho(\xi,\xi) = 1$, $\rho(-\xi,\xi) = -1$.

З а м е ч а н и е. Если ξ - дискретная случайная величина, принимающая счетное множество значений $x_1, x_2, \ldots$, то $M\xi = \sum_{i \geq 1} x_i p_i < \infty$, если наряду с этим рядом сходится и ряд, составленный из абсолютных величин, т.е. $\sum_{i \geq 1} |x_i| \cdot p_i < \infty$.

Все свойства I-4, сформулированные для математического ожидания случайной величины, в случае конечного множества значений, справедливы и в этом случае.

Аналогично определяется дисперсия ξ и $Cov(\xi,\eta)$ двух случайных величин $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$.

П р и м е р I0.I. Бросают две игральные кости. Тогда пространство элементарных исходов данного эксперимента $\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (6,6)\}$. Всего имеется 36 пар (элементов). Предположим, что каждому исходу (каждой точке Ω) ставится в соответствие максимум своих компонент, т.е. $\xi = \xi(a,b) = max(a,b)$.

ξ - случайная величина на Ω, имеющая множество значений

$$\xi(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Составим вначале закон распределения этой случайной величины:

$$P_1 = P\{\xi(\omega) = 1\} = P\{\{(1,1)\}\} = \frac{1}{36};$$

$$P_2 = P\{\xi(\omega) = 2\} = P\{\{(1,2)\}; \{(2,1)\}; \{(2,2)\}\} = \frac{3}{36};$$

$$P_3 = P\{\xi(\omega) = 3\} = P\{(1,3);(2,3);(3,1);(3,2);(3,3)\} = \frac{5}{36};$$

$$P_4 = P\{\xi(\omega) = 4\} = P\{(1,4);(2,4);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\} = \frac{7}{36}.$$

Аналогично $P_5 = P\{\xi(\omega) = 5\} = \frac{9}{36}$; $P_6 = P\{\xi(\omega) = 6\} = \frac{11}{36}$.

Таким образом получаем закон распределения:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

Вычислим математическое ожидание случайной величины ξ:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = 1\cdot\frac{1}{36} + 2\cdot\frac{3}{36} + \ldots + 6\cdot\frac{11}{36} = 4,47.$$

Дисперсия ξ равна

$$\mathcal{D}\xi = \sum_{i=1}^{6}(x_i - M\xi)^2 p_i = \alpha_2 - \alpha_1^2,$$

где

$$\alpha_2 = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i = 1\cdot\frac{1}{36} + 2^2\cdot\frac{3}{36} + \ldots + 6^2\cdot\frac{11}{36} = 21,97.$$

Тогда

$$\mathcal{D}\xi = 21,97 - (4,47)^2 = 1,99;$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{\mathcal{D}\xi} = \sqrt{1,99} = 1,41.$$

Рассмотрим теперь случайную величину η, равную сумме своих компонент, т.е. $\eta(a,b) = a+b$. Таким образом, η есть случайная величина, принимающая следующие значения $Y = \{2,3,4,\ldots,12\}$.

Распределение η имеет вид

y_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_i	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

так как, например, легко видеть, что

$$P_4 = P\{\eta(\omega) = 5\} = P\{(1,4);(2,3);(3,2);(4,1)\} = \frac{4}{36}.$$

Математическое ожидание равно

$$M\eta = \sum_{i=1}^{11} y_i P_i = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + \ldots + 11\cdot\frac{2}{36} + 12\cdot\frac{1}{36} = 7.$$

Дисперсия

$$\mathcal{D}\eta = \sum_{i=1}^{11}(y_i - M\eta)^2 P_i = \alpha_2 - \alpha_1^2,$$

где

$$\alpha_2 = \sum_{i=1}^{11} y_i^2 P_i = 2^2\cdot\frac{1}{36} + 3^2\cdot\frac{2}{36} + \ldots + 12^2\cdot\frac{1}{36} = 54,83;$$

окончательно имеем

$$\mathcal{D}\eta = 54,83 - 7^2 = 5,83; \quad \sigma_\xi = \sqrt{5,83} = 2,41.$$

П р и м е р 10.4. Отдел технического контроля проверяет детали на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,95. Найти математическое ожидание (среднее), дисперсию числа стандартных изделий в партии из 1000 изделий, а также наивероятнейшее число K_0 стандартных изделий.

Решение. Пусть случайная величина характеризует число стандартных изделий в партии из 1000 изделий. Тогда ξ - бернуллиевская случайная величина, с вероятностью наудачу взятому изделию быть стандартным $p=0,95$ и $q=1-p=0,05$. Тогда $M\xi = n\cdot p = 1000\cdot 0,95$, т.е. среднее число стандартных изделий равно 950 штук.

$$D\xi = npq = 1000\cdot 0,95\cdot 0,05 = 47,5\ ;\ \sigma_\xi = \sqrt{47,5} = 6,9\ .$$

Вычислим теперь наивероятнейшее число K_0 стандартных изделий. Имеем

$$np - q \le K_0 \le np + p$$

или

$$1000\times 0,95 - 0,05 \le K_0 \le 1000\times 0,95 + 0,95$$

$$949,95 \le K_0 \le 950,95.$$

Итак, $K_0 = 950$, т.е. $K_0 = M\xi$ - наивероятнейшее число K_0 совпадает с математическим ожиданием $M\xi$.

Примеры для решения

П р и м е р 10.5. Найти закон распределения дискретной случайной величины ξ, которая принимает два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$, а $P\{\xi = x_1\} = 0,2$, если её математическое ожидание $M\xi = 2,6$, а дисперсия $D\xi = 0,64$.

П р и м е р 10.6. Даны независимые случайные величины ξ и η своими законами распределения. Найти $M(\xi+\eta)$ и $D(\xi+\eta)$, если

ξ:

x_i	4	6	7
p_i	0,7	0,2	0,1

η:

y_i	-3	-2	0
p_i	0,2	0,3	0,5

Пример 10.7. Рабочий обслуживает четыре станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует регулировки равна 0,9, второй — 0,8, третий — 0,75, четвертый — 0,7. Найдите математическое ожидание числа станков, которые в течение часа не потребуют регулировки.

Пример 10.8. Стрелок производит пять выстрелов по мишени. ξ — случайная величина числа попаданий. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Составить закон распределения и, пользуясь этим законом, определить дисперсию и математическое ожидание этой случайной величины. Как еще можно найти $M\xi$ и $Д\xi$? Определите наивероятнейшее число попаданий.

Пример 10.9. В партии 1000 изделий, каждое из которых удовлетворяет стандарту с вероятностью 0,8. За каждое изделие, прошедшее проверку и удовлетворяющее стандарту, предприятие получает 10 рублей; за изделие, прошедшее проверку и не удовлетворяющее стандарту, предприятие уплачивает штраф 15 рублей. Найти математическое ожидание прибыли, полученной предприятием за выпуск 1000 изделий.

Пример 10.10. Случайные величины ξ и η заданы совместным законом распределения

η \ ξ	3	10	12
4	0,17	0,13	0,15
5	0,10	0,30	0,05

Найти $M\xi$, $Д\eta$, ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин ξ и η

Тема 11. Непрерывные случайные величины

Функцией распределения случайной величины ξ **называется функция** $F(x)$**, определенная как**

$$F(x) = P\{\xi < x\}.$$

Если ξ - дискретная случайная величина, то для нее можно определить функцию распределения. Она имеет вид ступенчатой функции и

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(x_i). \qquad (1.1)$$

<u>Свойства функции распределения</u>:

1) $0 \le F(x) \le 1$, причем $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$, а $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;

2) $F(x)$ неубывающая функция, т.е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$;

3) $F(x)$ непрерывна слева в каждой своей точке;

4) Вероятность попадания случайной величины ξ в заданный интервал $[a, b[$

$$P\{\xi \in [a, b[\} = F(b) - F(a).$$

При изучении непрерывных случайных величин основным является понятие плотности вероятностей.

Плотностью вероятности (дифференциальной функцией распределения) случайной величины ξ называется предел отношения вероятности попадания ее на элементарный участок от x до $x + \Delta x$, к длине этого участка Δx, когда $\Delta x \to 0$, т.е.

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x \le \xi < x + \Delta x\}}{\Delta x}. \qquad (1.1')$$

Случайная величина называется непрерывной, если ее функция распределения непрерывна на всей оси Ox, а плотность вероятностей $f(x)$ существует везде, за исключением, быть может, конечного числа точек.

Если $F(x)$ имеет производную, то в силу $(1.1')$

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

Функция распределения $F(x)$ выражается через плотность вероятностей $f(x)$ формулой

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt. \qquad (1.2)$$

Дифференциальная функция распределения обладает следующими свойствами:

I) $f(x) \geq 0$.

2) Несобственный интеграл от нее, вычисленный по R, равен единице, т.е.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Геометрически это означает, что площадь, ограниченная кривой $y = f(x)$ и осью Ox равна I.

Вероятность того, что случайная величина примет значения, принадлежащие интервалу $[a, b[$ равна
$$P\{\xi \in [a, b[\} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx. \qquad (1.3)$$

Тогда, если ξ - непрерывная случайная величина, то вероятность того, что ξ примет определенное значение, равна нулю, т.е.
$$P\{\xi = a\} = 0.$$

В силу этого, для непрерывной случайной величины
$$P\{\xi \in [a, b]\} = P\{a \leq \xi \leq b\} = P\{a \leq \xi < b\} = P\{a < \xi < b\}.$$

Как и в случае дискретной случайной величины введем понятие системы двух случайных величин. Пусть $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ две непрерывные случайные величины, заданные на одном и том же пространстве Ω элементарных исходов. Случайная величина $\zeta(\omega) = (\xi(\omega), \eta(\omega))$ называется двумерной случайной величиной. Для ее характеристики вводится понятие двумерной функции распределения $F(x, y)$:
$$F(x, y) = P\{\xi(\omega) < x, \eta(\omega) < y\}.$$

Геометрически это равенство можно истолковать так: $F(x, y)$ есть вероятность того, что случайная точка (ξ, η) попадает в бесконечный квадрат с вершиной (x, y), расположенной левее и ниже этой вершины. Двумерная функция распределения обладает следующими свойствами (аналогичны свойствам двумерного закона распределения):

I) $0 \leq F(x, y) \leq 1$.

2) Двумерная функция есть неубывающая по каждому своему аргументу, т.е.
$$F(x_1, y) \leq F(x_2, y), \text{ если } x_1 < x_2,$$
$$F(x, y_1) \leq F(x, y_2), \text{ если } y_1 < y_2.$$

3) Имеют место предельные соотношения
$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0;$$
$$F(+\infty, +\infty) = 1.$$

4) При $x=\infty$ функция системы становится функцией распределения случайной величины η, т.е.

$$\mathcal{F}(+\infty, y) = P\{\eta(\omega) < y\}.$$

5) При $y=\infty$ функция распределения системы становится функцией распределения случайной величины ξ, т.е.

$$\mathcal{F}(x, +\infty) = P\{\xi(\omega) < x\}.$$

Определение. Случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ называются независимыми, если выполняется соотношение:

$$\mathcal{F}(x,y) = P\{\xi < x, \eta < y\} = P\{\xi < x\} \cdot P\{\eta < y\}.$$

Аналогично можно дать понятие n - мерной случайной величины и независимости n - случайных величин.

Определение. Непрерывная случайная величина ξ называется равномерно распределенной случайной величиной, если дифференциальная функция распределения ее имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \bar{\in}]a,b[, \\ \frac{1}{b-a}, & x \in]a,b[. \end{cases}$$

Легко показать, что функция распределения равномерно распределенной случайной величины равна

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Определение. Случайная величина ξ называется гауссовской или нормально распределенной случайной величиной, если ее дифференциальная функция распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (1.4)$$

Здесь $\sigma > 0$ и a - параметры этого распределения.

Вероятность того, что ξ примет значение, принадлежащее интервалу $[\alpha, \beta[$

$$P\{\xi \in [\alpha, \beta[\} = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \qquad (1.5)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ - функция Лапласа.

Вероятность того, что абсолютная величина разности $\xi - a$ меньше положительного числа δ

$$P\{|\xi - a| < \delta\} = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (1.6)$$

В частности при $a=0$, справедливо равенство

$$P\{|\xi| < \delta\} = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

О п р е д е л е н и е. Случайная величина ξ называется показательно (экспоненциально) распределенной, если плотность вероятностей имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x<0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x\geq 0. \end{cases} \qquad (1.7)$$

или функция распределения которой

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x<0, \\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{если } x\geq 0, \end{cases}$$

где $\lambda>0$ – некоторый параметр распределения.

Вероятность попадания в заданный интервал непрерывной случайной величины ξ показательно распределенной равна

$$P\{\xi\in[a,b[\} = e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Пример I.I. Дискретная случайная величина ξ задана законом распределения

x_i	2	4	7
p_i	0,2	0,4	0,4

Найти интегральную функцию распределения и начертить ее график.

Р е ш е н и е

I) Если $x\leq 2$, то $F(x)=0$, так как значения меньших числа 2 случайная величина ξ не принимает, т.е.

при $x\leq 2$ $\quad F(x)=\sum\limits_{x_i<2} p_i = 0.$

2) Если $2<x\leq 4$, то $F(x)=0,2$, так как в этом случае

$$F(x)=\sum_{x_i<4} p_i = P(2)=0,2.$$

3) Если $4<x\leq 7$, то $F(x)=0,6$, так как в этом случае случайная величина ξ может принять два значения 2 и 4, т.е.

$$F(x)=\sum_{x_i<7} p_i = P(2)+P(4)=0,2+0,4=0,6.$$

4) Если $x > 7$, то $F(x) = 1$, так как теперь (можно брать число x больше 7).

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i = P(2) + P(4) + P(7) = 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}4 = 1.$$

Итак, $F(x)$ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 2, \\ 0{,}2, & \text{если } 2 < x \le 4, \\ 0{,}6, & \text{если } 4 < x \le 7, \\ 1, & \text{если } x > 7. \end{cases}$$

График $F(x)$ (рис.I) представляет собой ступенчатую функцию со скачками в точках $x = 2, 4, 7,$ т.е.

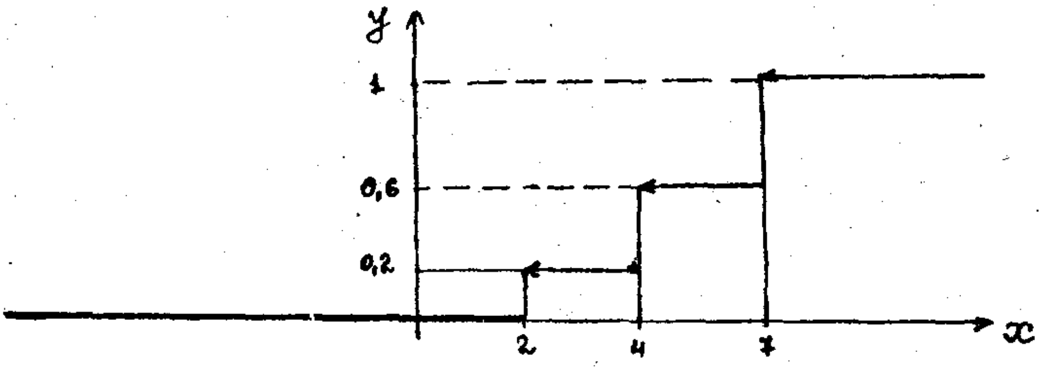


Рис. I

Пример I.2. Дана интегральная функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ \operatorname{arctg} x, & \text{при } 0 < x \le \pi/4, \\ 1, & \text{при } x > \pi/4. \end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию распределения.

Решение

По определению $f(x) = F'(x)$. Итак,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{1}{1+x^2}, & \text{при } 0 < x \le \pi/4, \\ 0, & \text{при } x > \pi/4. \end{cases}$$

Пример I.3. Непрерывная случайная величина ξ задана своей дифференциальной функцией распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \bar{\in} \,]3,8[, \\ cx^3, & x \in \,]3,8[. \end{cases}$$

Найти неизвестный параметр c .

Р е ш е н и е

В силу того, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$,

имеем: $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{3} f(x)dx + \int\limits_{3}^{8} f(x)dx + \int\limits_{8}^{+\infty} f(x)dx =$$

$$= \int\limits_{3}^{8} cx^3 dx = c\,\frac{x^4}{4}\Big|_3^8 = \frac{c}{4}(4096-81) = \frac{4015}{4}c .$$

Итак, $\frac{4015}{4}c = 1$ и $c = \frac{4}{4015}$. Тогда дифференциальная функция распределения имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \bar{\in} \,]3,8[, \\ \frac{4x^3}{4015}, & x \in \,]3,8[. \end{cases}$$

Пример I.4. Случайная величина ξ задана интегральной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le -2, \\ \frac{1}{2}(x+2), & \text{если } -2 < x \le 0, \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания ξ примет значение заключенное в интервале

а) $]1;5[$;

б) $]-3;-1[$;

в) $]-1,5;-0,5[$.

Р е ш е н и е.

Вероятность того, что ξ примет значение, заключенное в интервале $]a,b[$ равно приращению функции распределения на этом интервале, т.е. $P\{\xi \in [a,b[\} = F(b) - F(a)$.

Тогда:
в случае а имеем

$$P\{1 < \xi < 5\} = \mathcal{F}(5) - \mathcal{F}(1) = 1 - 1 = 0;$$

в случае б

$$P\{\xi \in]-3;-1[\} = \mathcal{F}(-1) - \mathcal{F}(-3) = \frac{1}{2}(-1+2) - 0 = \frac{1}{2};$$

в случае в

$$P\{\xi \in]-1,5;-0,5[\} = \mathcal{F}(-0,5) - \mathcal{F}(-1,5) = \frac{1}{2}(-0,5+2) - \frac{1}{2}(-1,5+2) = \frac{1}{2}.$$

Пример I.5. Дана дифференциальная функция распределения непрерывной случайной величины ξ :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 0, \\ \cos x, & \text{при} \quad x \in]0, \pi/2[, \\ 0, & \text{при} \quad x \geq \pi/2. \end{cases}$$

Найти интегральную функцию $\mathcal{F}(x)$.

Р е ш е н и е

Воспользуемся формулой (I.2). Если $x \leq 0$ то $f(x) = 0$ и, следовательно,

$$\mathcal{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0.$$

При $0 < x \leq \pi/2$

$$\mathcal{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{x} \cos t\, dt = \sin x.$$

Если $x > \pi/2$, то

$$\mathcal{F}(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{\pi/2} f(t)dt + \int_{\pi/2}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{\pi/2} \cos x\, dx = 1.$$

Итак, искомая функция распределения имеет вид

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leq 0, \\ \sin x, & \text{при} \quad 0 < x \leq \pi/2, \\ 1, & \text{при} \quad x > \pi/2. \end{cases}$$

Пример I.6. Параметры нормально распределенной случайной величины ξ равны $a = 10$, $\sigma = 2$. Найти вероятность того, что в результате испытания ξ примет значение, заключенное в интервале (I2, I4).

Р е ш е н и е

Воспользуемся формулой (I.5). Имеем

$$P\{12<\xi<14\} = \Phi\left(\frac{14-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(1).$$

По таблице находим, что $\Phi(2)=0,4772$, $\Phi(1) = 0,3413$. Искомая вероятность $P\{12<\xi<14\} = 0,1359.$

Пример I.7. Написать дифференциальную и интегральную функции показательного распределения, если параметр $\lambda = 7$.

Р е ш е н и е

Подставив значение $\lambda = 7$ в формулы (I.7) и (I.8), получим:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x<0, \\ 7e^{-7x}, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x<0, \\ 1-e^{-7x}, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

Пример I.8. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x<0 \text{ или } y<0, \\ \sin x \sin y, & \text{при } x\in[0,\pi/2], y\in[0,\pi/2], \\ \sin x, & \text{при } x\in[0,\pi/2], y \geq \pi/2, \\ \sin y, & \text{при } x \geq \pi/2, y\in[0,\pi/2], \\ 1, & \text{при } x\geq \pi/2, y \geq \pi/2. \end{cases}$$

Найти частные законы распределения случайных величин ξ и η и показать, что эти случайные величины независимы.

Р е ш е н и е

Частный закон распределения случайной величины ξ равен

$$P\{\xi<x\} = F(x,+\infty).$$

В нашем случае

$$F(x,+\infty) = F(x,\pi/2) = \sin x \sin \pi/2 = \sin x.$$

Итак,

$$P\{\xi < x\} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ \sin x, & \text{если} \quad 0 < x \le \pi/2, \\ 1, & \text{если} \quad x > \pi/2. \end{cases}$$

Аналогично

$$P\{\eta < y\} = F(+\infty, y) = F(\pi/2, y) = \sin \pi/2 \sin y = \sin y.$$

и

$$P\{\eta < y\} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y \le 0, \\ \sin y, & \text{если} \quad 0 < y \le \pi/2, \\ 1, & \text{если} \quad y > \pi/2. \end{cases}$$

Теперь легко показать, что случайные величины ξ и η независимы, так как $F(x,y) = P\{\xi < x, \eta < y\} = \sin x \cdot \sin y =$ $= P\{\xi < x\} \cdot P\{\eta < y\} = \sin x \cdot \sin y$, $x \in [0, \pi/2]$, $y \in [0, \pi/2]$.

Задачи для решения

I.9. Охотник производит стрельбу по дичи до первого попадания, а всего успевает сделать не более трех выстрелов. Составить закон распределения случайной величины, которая выражает число производимых выстрелов, если вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,6. Построить функцию распределения случайной величины.

I.10. Случайная величина ξ задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 0, \\ x^3/8, & \text{при} \quad 0 < x \le 2, \\ 1, & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Требуется:

а) найти плотность распределения $f(x)$;

б) построить графики функции распределения и плотности распределения;

в) найти вероятность того, что в результате испытания ξ примет значение, принадлежащее интервалу (I/2; 3/2).

I.II. Случайная величина имеет распределение Коши с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in R.$$

Определить интегральную функцию распределения.

I.12. Дифференциальная функция непрерывной случайной величины ξ определена равенством

$$f(x)= \frac{4c}{e^{x}+e^{-x}},\ x\in R.$$

Найти постоянный параметр c.

I.13. Случайная величина ξ имеет плотность

$$f(x)= \frac{A}{1+x^2},\ x\in R.$$

Найти:

а) A и функцию распределения ξ .

б) $P\{-1<\xi<1\}$.

I.14. Плотность случайной величины ξ имеет график (рис.2) —

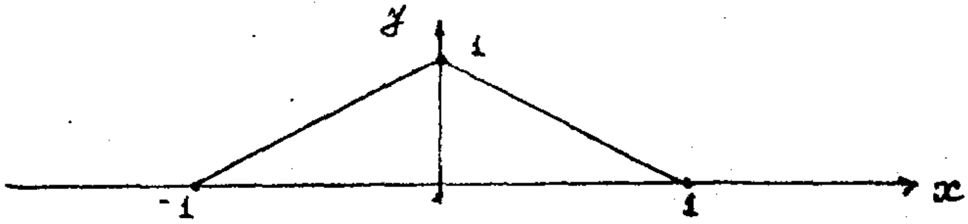


Рис. 2

Написать аналитическое выражение плотности и построить график функции распределения.

I.15. Функция распределения ξ имеет вид

$$\mathcal{F}(x)= \begin{cases} 0, & \text{при } x\le \pi/6, \\ \cos 3x, & \text{при } \pi/6<x\le \pi/3, \\ 1, & \text{при } x>\pi/3. \end{cases}$$

Найти:

а) дифференциальную функцию распределения;

б) построить график $\mathcal{F}(x)$, $f(x)$;

в) найти вероятность того, что $\xi\in[\pi/9, \pi/2]$;

I.16. Случайная величина ξ в интервале $]2,4[$ задана плотностью $f(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x-6$, вне этого интервала $f(x)=0$.

Найти:

а) $\mathcal{F}(x)$ и построить график.

I.17. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону

$$\mathcal{F}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt.$$

Найти:

а) $f(x)$;

б) вероятность того, что $\xi \in [-3, 3]$.

I.I8. Написать интегральную и дифференциальную функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 5$ и найти вероятность того, что $\xi \in]2, 5[$.

I.I9. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-4x})(1-e^{-2y}), & \text{при } x>0, y>0, \\ 0, & \text{при } x<0, y<0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f_\xi(x)$, $f_\eta(x)$, если ξ и η независимы.

Тема 12. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ называется конечное число

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx, \qquad (2.1)$$

если этот интеграл сходится абсолютно, т.е. существует и конечен интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)dx.$$

В противном случае говорят, что не существует математическое ожидание ξ.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины обладает всеми свойствами математического ожидания дискретной случайной величины (см. тему II).

Диспресией непрерывной случаной величины ξ называется конечное число

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 f(x)dx. \qquad (2.2)$$

Диспресия непрерывной случайной величины обладает свойствами диспресии для дискретных случайных величин (см. тему II).

Начальным моментом k -го порядка называется конечное число

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx, \quad k \geq 0, \qquad (2.3)$$

если этот интеграл сходится абсолютно.

Центральным моментом k -ого порядка называется конечное число

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^k f(x)dx, \quad k \geq 0, \qquad (2.4)$$

если этот интеграл сходится абсолютно.

Используя понятие начального момента дисспресию $\mathcal{D}\xi$ можно вычислять по формуле

$$\mathcal{D}\xi = \alpha_2 - (M\xi)^2. \tag{2.5}$$

Среднее квадратическое отклонение σ_ξ случайной величины ξ равно

$$\sigma_\xi = \sqrt{\mathcal{D}\xi}.$$

Если $\eta = \varphi(\xi)$ и ξ принимает все действительные значения, то

$$M\eta = M[\varphi(\xi)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\,dx, \tag{2.6}$$

$$\mathcal{D}\eta = \mathcal{D}[\varphi(\xi)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi(x) - M[\varphi(x)]\right)^2 f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) f(x)\,dx - \{M[\varphi(\xi)]\}^2. \tag{2.7}$$

В частности, если возможные значения ξ принадлежат интервалу (a, b) то

$$M\eta = \int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx, \tag{2.8}$$

$$\mathcal{D}\eta = \int_a^b [\varphi(x) - M\eta]^2 f(x)\,dx. \tag{2.9}$$

Очевидно, используя эти понятия, можно дать следующие определения начальных и центральных моментов случайной величины, а именно:

$$\alpha_k = M[\xi^k],$$

и

$$\mu_k = M[(\xi - M\xi)^k], \quad k \geq 0,$$

и установить, что $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \mathcal{D}\xi$, $\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 +$

$$+ 2\alpha_1^3, \quad \mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4 \tag{2.10}$$

и т.д.

Если ξ – равномерно распределенная случайная величина, то

$$M\xi = \frac{a+b}{2}, \quad \mathcal{D}\xi = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Если ξ – гауссовская случайная величина, то

$$M\xi = a, \quad \mathcal{D}\xi = \sigma^2, \quad \sigma_\xi = \sigma.$$

Если ξ – показательно распределенная случайная величина, то

$$M\xi = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathcal{D}\xi = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma_\xi = \frac{1}{\lambda}.$$

Пример 2.1. Случайная величина ξ задана плотностью $f(x) = 2x$ в интервале $]0,1[$ и $f(x) = 0$ вне этого интервала. Найти математическое ожидание $M\xi$ и дисспресию $\mathcal{D}\xi$.

Р е ш е н и е

Воспользуемся определением $M\xi$. Имеем

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x f(x)dx + \int_{0}^{1} x f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} x f(x)dx =$$

$$= 0 + \int_{0}^{1} x f(x)dx + 0 = \int_{0}^{1} x\cdot 2x\,dx = \frac{2}{3}.$$

Для нахождения $D\xi$ воспользуемся соотношением $D\xi = \alpha_2 - (M\xi)^2$. Вычислим α_2. Имеем

$$\alpha_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{0}^{1} x^2\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Тогда $$D\xi = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

Пример 2.2. Случайная величина ξ задана дифференциальной функцией $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$ в интервале $]0, \pi[$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание и диспресию случайной величины $\eta = \xi^2$.

Р е ш е н и е

Воспользуемся формулами математического ожидания и диспресии для функции от случайной величины (2.8) и (2.9). В нашем случае $a = 0$, $b = \pi$ и

$$M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{2}\sin x\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} x^2 \sin x\,dx,$$

$$D\eta = \int_{0}^{\pi} x^4\cdot\frac{1}{2}\sin x\,dx - (M\eta)^2.$$

Интегрируя полученные интегралы по частям, окончательно получим, что $$M\eta = \frac{\pi^2-4}{2}, \quad D\eta = \frac{\pi^4}{4} - 4\pi^2 + 20.$$

Пример 2.3. Случайная величины ξ задана своей плотностью $f(x) = 0{,}5x$ в интервале $]0, 2[$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти начальные и центральные моменты до четвертого порядка, включительно.

Р е ш е н и е

По формуле (2.3) найдем начальные моменты

$$\alpha_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_{0}^{2} x\cdot 0{,}5x\,dx = \frac{4}{3};$$

$$\alpha_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = 0{,}5\int_{0}^{2} x^2\cdot x\,dx = 2;$$

$$\alpha_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x)dx = 0{,}5\int_{0}^{2} x^3\cdot x\,dx = 3{,}2;$$

б)
$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ \frac{x^2}{4}, & \text{при } 0 < x \le 2, \\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Тема 13. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ. НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА

Первое неравенство Чебышева

Если случайная величина ξ неотрицательна и $M\xi < \infty$, то
$$P\{\xi \geq 1\} \leq M\xi.$$

Следствие

Если ξ неотрицательная случайная величина и $M\xi < \infty$, то
$$P\{\xi \geq a\} \leq \frac{M\xi}{a}, \qquad \text{если} \quad a > 0.$$

Второе неравенство Чебышева

Если ξ произвольная случайная величина и $|M\xi| < \infty$, то
$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathcal{D}\xi}{\varepsilon^2}$$

или
$$P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\mathcal{D}\xi}{\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебышева

Если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих конечные диспресии, ограниченные одной и той же постоянной величиной C, то среднее арифметическое случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий, т.е. если $\varepsilon > 0$ – произвольное положительное число, то
$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \xi_i - \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} M\xi_i\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

В частности, среднее арифметическое последовательности попарно независимых величин, диспресии которых ограничены константой C и которые имеют одно и то же математическое ожидание a, сходится к нему по вероятности, т.е. для любого $\varepsilon > 0$
$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \xi_i - a\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Пример 3.1. Устройство состоит из десяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,05.

С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что число отказов за время T окажется:

а) не меньше двух;

б) меньше двух.

Р е ш е н и е

Обозначим через ξ дискретную случайную величину - число отказавших элементов за время T. Случайная величина ξ является бернуллиевской случайной величиной и тогда $M\xi = np = 10 \cdot 0{,}05 = 0{,}5$ и ξ принимает значения от 0 до 10, т.е. ξ является неотрицательной случайной величиной. Тогда в случае

а) нам нужно оценить $P\{\xi \geq 2\}$.

По следствию из первого неравенства Чебышева получим

$$P\{\xi \geq 2\} \leq \frac{M\xi}{2} = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25;$$

б) событие $\{\xi \geq 2\}$ и $\{0 \leq \xi < 2\}$ являются противоположными, поэтому сумма их вероятностей равна единице. Следовательно

$$P\{0 \leq \xi < 2\} > 1 - P\{\xi > 2\} = 0{,}75.$$

Пример 3.2. Автомобильный парк насчитывает 120 автобусов. Вероятность поломки отдельно взятого автобуса, т.е. вероятность невыхода автобуса на линию, за время T равна 0,2. Пользуясь неравенством Чебышева оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших автобусов и его средним числом (математическим ожиданием) отказов за время T окажется меньше 5.

Р е ш е н и е

Пусть ξ - дискретная случайная величина - число отказавших автобусов за время T. ξ является бернуллиевской случайной величиной. Вычислим $M\xi$ и $D\xi$.

Имеем

$$M\xi = np = 120 \cdot 0{,}2 = 24; \quad D\xi = npq = 120 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 19{,}2.$$

Для вычисления $P\{|\xi - M\xi| < 5\}$ воспользуемся неравенством Чебышева. Имеем

$$P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

В нашем случае $M\xi = 24$; $D\xi = 19{,}2$; $\varepsilon = 5$.

Тогда

$$P\{|\xi - M\xi| < 5\} \geq 1 - \frac{19{,}2}{25} = 0{,}232.$$

Пример 3.3. Последовательность независимых случайных величин ξ_1, ξ_2, ... задана законом распределения

ξ_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
P	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

Применима ли к заданной последовательности теорема Чебышева?

Р е ш е н и е

Для того, чтобы к последовательности ξ_1, ξ_2, ... случайных величин была применима теорема Чебышева достаточно

I) чтобы все эти величины были попарно независимы. Это требование вытекает из того, что поскольку $\{\xi_i\}$ независима;

2) чтобы математические ожидания были конечны. Проверим выполнение этого требования. Имеем

$$M\xi_n = -n\alpha\cdot\frac{1}{2n^2} + 0\left(1-\frac{1}{n^2}\right) + n\alpha\cdot\frac{1}{2n^2} = 0 .$$

Таким образом, каждая случайная величина имеет конечное математическое ожидание;

3) чтобы дисперсии были ограничены одним числом. Проверим, выполняется ли это требование. Имеем

$$D\xi_n = \alpha_2 - (M\xi_n)^2 = \alpha_2 ,$$

где $\alpha_2 = M\xi_n^2$.

Составим закон распределения для ξ_n^2

ξ_n^2	$n^2\alpha^2$	0	$n^2\alpha^2$
P	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

или, сложив вероятности одинаковых возможных значений,

ξ_n^2	0	$n^2\alpha^2$
P	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n^2}$

Тогда

$$M\xi_n^2 = 0\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right) + n^2\alpha^2\cdot\frac{1}{n^2} = \alpha^2 .$$

Итак,

$$D\xi_n = \alpha^2,$$

т.е. дисперсии ограничены одним и тем же числом α^2.

Видим, что поскольку все требования теоремы Чебышева выполняются,

значит она применимы к рассматриваемой последовательности и имеет вид
$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\xi_i\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Задачи для решения

3.4. Доля нестандартных деталей в продукции цеха составляет 2%. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что в партии, состоящей из 1000 деталей, количество стандартных будет от 970 до 990.

3.5. Случайная величина ξ имеет плотность распределения
$$f(x) = e^{-2|x|}.$$
Найти $P\{|\xi| < n\}$ и оценить снизу эту вероятность, пользуясь неравенством Чебышева.

3.6. Распределение случайной величины ξ задано рядом распределения

ξ	1	2	3	4	5	6
P	0,05	0,1	0,25	0,3	0,2	0,1

Чему равна вероятность того, что случайная величина ξ отклоняется от своего математического ожидания на величину меньше 2 ?

Пользуясь неравенством Чебышова оценить эту вероятность, сравнить полученные результаты.

3.7. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что нормально распределенная случайная величина ξ отклонится от своего математического ожидания больше чем на три средних квадратических отклонения.

3.8. Сколько следует проверить деталей, чтобы с вероятностью не меньшей 0,96 можно было ожидать, что абсолютная величина отклонения частоты годных деталей от вероятности детали быть годной, равной 0,98, не превысит 0,02?

3.9. Определить, имеет ли место закон больших чисел для среднего арифметического из n попарно независимых случайных величин ξ_n, заданных рядом распределения

ξ_i	2	0	2
P	I/4	$\frac{I}{2}$	I/4

3.I0. Применим ли закон больших чисел к последовательности независимых случайных величин ξ_1, ξ_2, ..., ξ_k, ..., если $P\{\xi_k = \sqrt{k}\} = P\{\xi_k = -\sqrt{k}\} = \frac{1}{2\sqrt{k}}$, $P\{\xi_k = 0\} = 1 - \frac{1}{\sqrt{k}}$?

3.II. Выяснить, применима ли теорема Чебышева к последовательности независимых случайных величин $\{\xi_k\}$, если распределения имеют вид

ξ_k		0	
P	2	I–2	2